Terminale S/Equations différentielles

1. Equations différentielles :

Exercice 3647

On considère l'équation différentielle :
$(E)\ :\ y' + y = e^{-x}$

Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x{\cdot}e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle.

Exercice 3663

1. Déterminer l'expression de la fonction f vérifiant l'équation différentielle suivante :
$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 2 \end{cases}$$
Justifier votre réponse.

2. Déterminer l'expression de la fonction g vérifiant l'équation différentielle suivante :
$$\begin{cases} g' = 2{\cdot}g \\ g(0) = 1 \end{cases}$$
Justifier votre réponse.

3. Déterminer l'expression de la fonction h vérifiant l'équation différentielle suivante :
$$\begin{cases} h' = 2{\cdot}h \\ h(0) = 2 \end{cases}$$
Justifier votre réponse.

Exercice 3664

1. On considère l'équation différentielle :
$(E)\ :\ y' + y = e^{-x}$
Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :
$u(x) = x{\cdot}e^{-x}$
est une solution de l'équation différentielle (E).

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{9}{2}{\cdot}e^{-2x} - 3{\cdot}e^{-3x}$$
Montrer que la fonction f vérifie l'équation différentielle :
$y' + 2y = 3{\cdot}e^{-3x}$

Exercice 3673

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ vérifiant la condition (E) :

pour tout nombre réel x strictement positif :
$x{\cdot}f'(x) - f(x) = x^2{\cdot}e^{2x}$

1. Montrer que si une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$
vérifie :
$$(E)\ :\ \begin{cases} \text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif :} \\ \quad g'(x) = e^{2x} \end{cases}$$

2. Conjecturer l'expression des fonctions g vérifiant :
$g'(x) = e^{2x}$

3. Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\frac{1}{2}$?

Exercice 3690

Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_k(x) = x + \frac{1 - k{\cdot}e^x}{1 + k{\cdot}e^x}$$

1. Justifier que, pour tout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle :
$(E)\ :\ 2{\cdot}y' = (y - x)^2 + 1.$

2. En déduire le sens de variations de f_k sur $\mathbb{R}$.

2. Equations differentielles : y'=ay :

Exercice 3655

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{9}{2}{\cdot}e^{-2x} - 3{\cdot}e^{-3x}$$
Soit l'équation différentielle $(E)\ :\ y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E')\ :\ y' + 2y = 0$.

2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = \frac{9}{2}{\cdot}e^{-2x}$ est solution de (E').

3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

 BY-NC

$g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).

4. En remarquant que $f{=}g{+}h$, montrer que f est une solution de (E).

Exercice 3678

La fonction f est définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \left(20x+10\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t{=}0$, est $y(0){=}10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E):\ y' + \frac{1}{2}y = 20\cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

1. Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

   a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ vérifiant $g(0){=}10$. Démontrer que la fonction $g{-}f$ est solution, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ de l'équation différentielle :

   $$(E'):\ y' + \frac{1}{2}\cdot y = 0$$

   b. Résoudre l'équation différentielle (E').

   c. Conclure.

Exercice 3679

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a. $y' = -3y$ b. $y' - y = 0$

c. $5y' - 2y = 0$ d. $y = -3y'$

Exercice 3680

Dans chaque cas, déterminer la valeur de $a \in \mathbb{R}$ afin que la fonction f soit une solution de l'équation différentielle :

$y' = a\cdot y$

a. $f(x) = -3\cdot e^{4x}$ b. $f(x) = 4\cdot e^{0,2x}$

Exercice 3681

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

a. $y' - 3y = 0 \quad ; \quad f(0) = 2$

b. $2y' + 3y = 0 \quad ; \quad f(0) = -1$

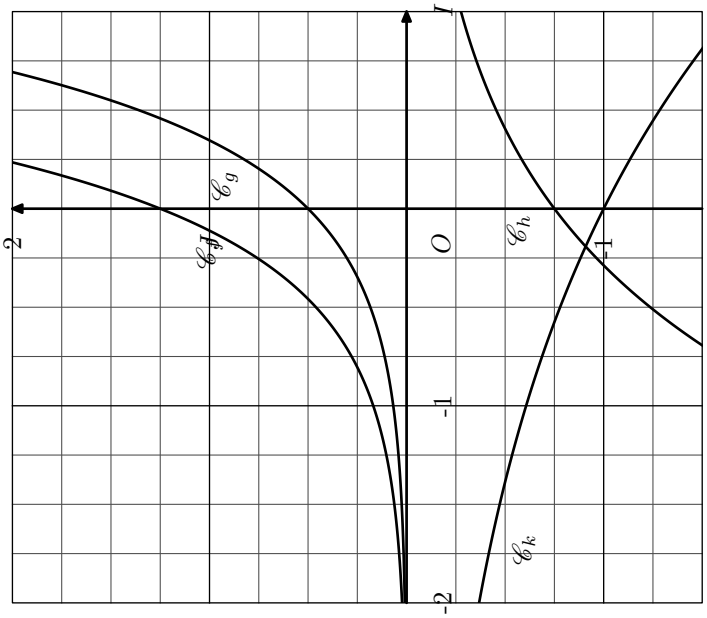
c. $3y' - 2y = 0 \quad ; \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$

d. $y - 3y' = 0 \quad ; \quad f(6) = e^3$

Exercice 3683

Dans le repère ci-dessous est représentée quatre courbe représentative de fonctions vérifiant l'équation différentielle :

$y' = a\cdot y$ pour $a \in \mathbb{R}$



En observant les tangentes à ces courbes au point d'abscisse 0, déterminer l'équation différentielle vérifiée par chacune de ces fonctions.

Exercice 3684

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$y' - 2y = e^{2x}, \quad (E)$

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $u(x) = x\cdot e^{2x}$
   est une solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle :
   $y' - 2\cdot y = 0 \quad (E_0)$

3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v{-}u$ est solution de (E_0).

4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Partie B - Etude d'une fonction

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \left(x+1\right)\cdot e^{2x}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

1. Etudier la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

2. Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.
   Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
   Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

Partie C - Résolution d'une équation

1. Montrer que l'équation $f(x){=}2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $\left[0{,}2\,;0{,}3\right]$.

2. Recopier, puis compléter le tableau suivant :

x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$f(x)$						

Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec une précision de 10^{-2} près par défaut.

3. Sur le papier millimétré ci-dessous, où les unités sont de $10\,cm$ en abscisses et $5\,cm$ en ordonnées, tracer l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ pour x appartenant à $[0\,;0{,}3]$.
Faire apparaître x_0 sur le graphique.

Exercice 3687

On cherche à résoudre l'équation différentielle :
$(1):\ y' - 2y = x{\cdot}e^x$

1. Résoudre l'équation différentielle :
$(2):\ y' - 2y = 0,$
où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$u(x) = \big(a{\cdot}x + b\big){\cdot}e^x$

a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

b. Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u + v$ est solution de (1).

c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Exercice 3966

On considère l'équation différentielle :
$(E):\ y' = 2{\cdot}y + \cos x$

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = a{\cdot}\cos x + b{\cdot}\sin x$
soit une solution f_0 de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle : $(E_0) : y' = 2{\cdot}y$.

3. Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f - f_0$ est solution de (E_0).

4. En déduire les solutions de (E).

5. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

3. Equations differentielles : y'=ay+b :

Exercice 3676

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écrant plat, en fonction de l'année.

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E):\ y' = \frac{1}{20}{\cdot}y{\cdot}(10 - y)$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $]0\,;+\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$

a. Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle :
$(E_1):\ z' = -\frac{1}{2}{\cdot}z + \frac{1}{20}$

b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$$

3. Etudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.

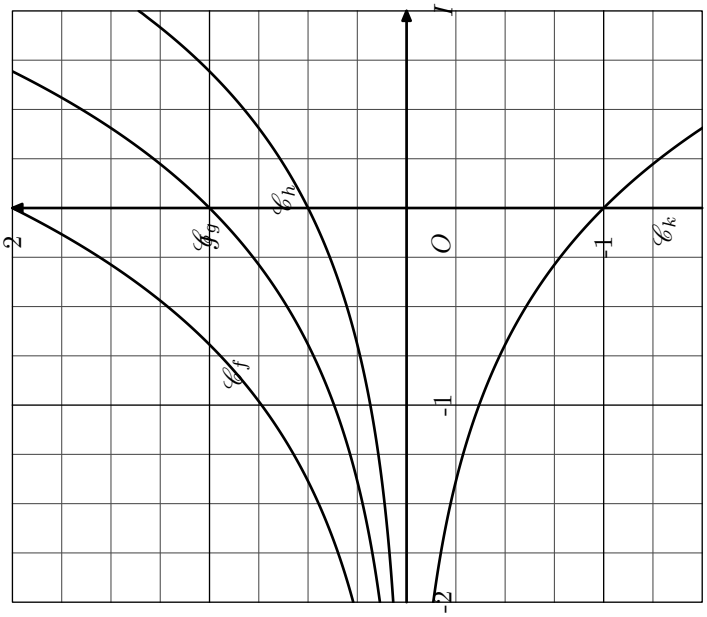
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement déassera-t-il 5 millions ?

Exercice 3682

Dans le repère ci-dessous est représentée quatre courbe représentative de fonctions vérifiant l'équation différentielle :

$y' = y$



Déterminer les conditions initiales définissant chacune de ses fonctions.

Exercice 3689

On considère une l'équation différentielle :
$$(E):\ y' - 3y = \frac{-3e}{\left(1 + e^{-3x}\right)^2}$$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = e^{-3x}{\cdot}\varphi(x)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, exprimer $\varphi'(x) - 3{\cdot}\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.

2. Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$

 BY-NC

et vérifie :
$\varphi(0) = \dfrac{e}{2}$.

Exercice 3691

En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t *(exprimé en années)* dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2)\ \begin{cases} u'(x) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{\left[u(t)\right]^2}{12} \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

1. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $\left[0\,;\,+\infty\right[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement, si la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3)\ \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}\cdot h(t) + \dfrac{1}{12} \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+^* \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

2. Donner les solutions de l'équation différentielle :
$y' = -\dfrac{1}{4}\cdot y + \dfrac{1}{12}$
et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

3. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 3692

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y' + y = 2$ b. $y' - 3y = -3$

c. $6y = 3y' + 2$ d. $5y = \dfrac{3}{2}y' + \dfrac{1}{3}$

Exercice 3693

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $4y' - y = 4 \quad ; \quad y(1) = e$

b. $15y' + 24y = 12 \quad ; \quad y(\dfrac{5}{4}) = 2$

c. $-\dfrac{3}{2}y' + \dfrac{1}{4}y = -1 \quad ; \quad y(3) = 6 + 2e$

Exercice 3773

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(E) :\ x\cdot f'(x) - (2x+1)\cdot f(x) = 8\cdot x^2$$

1. a. Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ par :
$g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$
est solution de l'équation différentielle :
$(E') :\ y' = 2\cdot y + 8$

   b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = x\cdot h(x)$ est solution de (E).

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

4. Annales :

Exercice 3134

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$.

1. On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle :
$(E_\lambda) :\ y' = y^2 + \lambda y$
et la condition $y(0) = 1$.

   On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$ et on pose sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$:
$z = \dfrac{1}{y_0}$
Ecrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.

2. **Question de cours** : PRE-REQUIS

   Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions :
$x \longmapsto Ce^{-\lambda x}$
où C est une constante réelle.

   a. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle :
$(E'_\lambda) :\ z' = -(\lambda z + 1)$
telle que $z(0) = 1$

   b. Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0.

On veut maintenant montrer que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$.

3. a. Démontrer que $\ln(1+\lambda) > \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$.
On pourra étudier sur $]0\,;\,1]$ *la fonction* f *définie par* $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$.

   b. En déduire que $\dfrac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \dfrac{1}{2}$.

4. En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$.
Démontrer alors que (E_λ) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$ que l'on précisera.

Exercice 3180

QCM : pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 0,75 point, chaque erreur enlève 0,25 point, l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points

de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.

Vous répondrez sur votre copie en indiquand le numéro de la question et la lettre correspondant à votre réponse :

1. L'équation $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. 0 solution	b. 1 solution
c. 2 solutions	d. plus de 2 solutions

2. L'expression $-e^{-x}$

a. n'est jamais négative	b. est toujours négative
c. n'est négative que si x est positif	d. n'est négative que si x ets négatif

3. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 2} =$

a. $-\dfrac{1}{2}$	b. 1
c. 2	d. $+\infty$

4. L'équation différentielle $y = 2y' - 1$ a pour ensemble de solutions :

a. $x \mapsto ke^{2x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$	b. $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} + 1$ avec $k \in \mathbb{R}$
c. $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$	d. $x \mapsto ke^{2x} + \dfrac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice 3259

Partie A : une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \ y' - 3y = \frac{-3e}{\left(1 + e^{-3x}\right)^2}$$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-3x}\varphi(x)$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.

2. Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\varphi(0) = \dfrac{e}{2}$.

Partie B : étude d'une fonction

Soit f la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{1-3x}}{1 + e^{-3x}}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique $2\,cm$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f.

2. Tracer $\mathscr{C}$.

3. Pour α réel non nul, on pose : $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx$

   a. Donner le signe et une interprétation graphique de I_α en fonction de α.

   b. Exprimer I_α en fonction de α.

   c. Déterminer la limite de I_α lorsque α tend vers $+\infty$.

Partie C : etude d'une suite

On définit sur $\mathbb{N}^*$ la suite (u_n) par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x) \cdot e^{\frac{x}{n}} dx$

où f est la fonction définie dans la **partie B.**

On ne cherchera pas à calculer u_n.

1. a. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}$, le signe de u_n.

   b. Donner le sens de variation de la suite (u_n).

   c. La suite (u_n) est-elle convergente ?

2. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$:

   $$I_1 \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{1}{n}} \cdot I_1$$

   où I_1 est l'intégrale de la **partie B** obtenue pour α égal à 1.

   b. En déduire la limite de la suite (u_n). Donner sa valeur exacte.

Exercice 3150

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(20x + 10\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ *(unité graphique 1 cm).*

1. Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

3. Etablir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Donner une valeur décimale approché à 10^{-3} près de α.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5. calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'un réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle : $(E) : y' + \dfrac{1}{2}y = 20 \cdot e^{\frac{1}{2}t}$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

   a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0\,;+\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, de l'équation différentielle :

 BY-NC

$$(E') : y' + \frac{1}{2}y = 0$$

b. Résoudre l'équation différentielle (E').

c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescent-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

4. La valeur θ en degré Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;3\right]$.
Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.