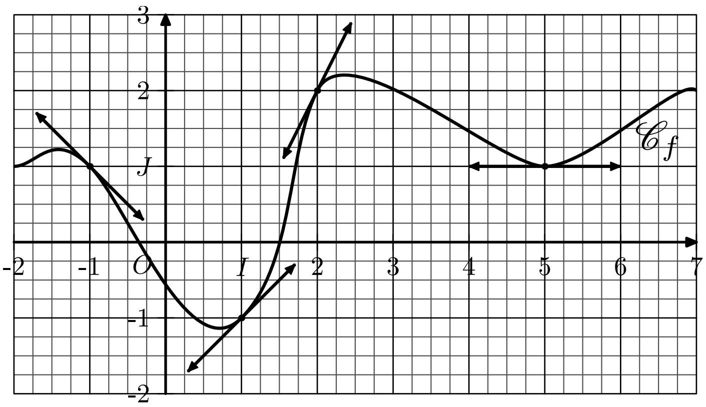
Terminale S/Derivabilite et continuite

1. Révisions sur les dérivés :

Exercice 3429

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-2\,;7\right]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$, aux points d'abscisses -1, 1, 2, 5 ont été tracées sur la représentation ci-dessus.

1. Déterminer le nombre dérivée de la fonction f en -1 et en 1.
2. Déterminer les équations des tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses 2 et 5.

Exercice 3314

Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = -5x^3 + 2x - 2$ b. $g(x) = \sqrt{x}\cdot(5x+1)$

c. $h(x) = \dfrac{3x-1}{2-x}$ d. $j(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{5-2x}$

Exercice 3912

Il est possible que certains des résultats, à démontrer, ne soient pas lisibles sur l'écran de votre calculatrice graphique.

On considère la fonction f définie sur $\left]0\,;1\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{10\cdot(x-8)}{x\cdot(x-1)}$$

et on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative relative à un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

1. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Déterminer les limites de f quand x tend vers 1 par valeurs inférieures et quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.
   c. En déduire les asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$.
2. a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
   b. Montrer que $f'(x)$ s'annule pour $\alpha = 8+2\sqrt{14}$ et pour $\beta = 8-2\sqrt{14}$.
   c. Dresser le tableau de variation de f *(on indiquera les valeurs approchées au dixième près des extrémums locaux à l'aide de la calculatrice).*

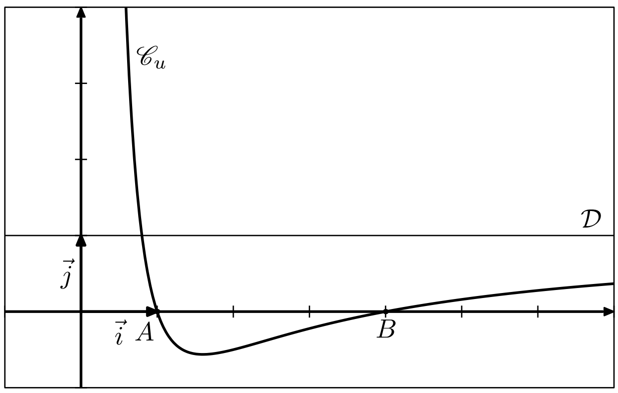
Exercice 6803

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=1$:



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points $A(1\,;0)$ et $B(4\,;0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathcal{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. a. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
   b. Donner $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.
   c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif :
   $$u(x) = \frac{x^2 - 5\cdot x + 4}{x^2}$$
2. On suppose l'existence d'une fonction f définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ vérifiant admettant pour dérivée la fonction u :
   $$f' = u$$
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   (it aucune valeur ne sera indiquée dans le tableau)

Exercice 3312

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples ; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et recopiez l'affirmation exacte sans justifier votre choix.

Barème : A chaque question est attribué 1 point.
Une réponse inexacte enlève 0,5 point.
Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à zéro.

Soit f la fonction définie sur $]4\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-4}$$

et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1. Une autre expression de $f(x)$ est :

   a. $f(x) = -2x + 1 - \dfrac{2}{x-1}$

   b. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 9x + 12}{4-x}$

   c. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 9x - 2}{x-4}$

2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $]4\,;+\infty[$. Une expression de $f'(x)$ est :

   a. $f'(x) = -2 - \dfrac{8}{(x-4)^2}$

   b. $f'(x) = \dfrac{(2-x)(x-6)}{(x-4)^2}$

   c. $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 16x - 24}{(x-4)^2}$

3. La courbe Γ admet pour asymptote :

   a. la droite d'équation $y=4$

   b. la droite d'équation $x=4$

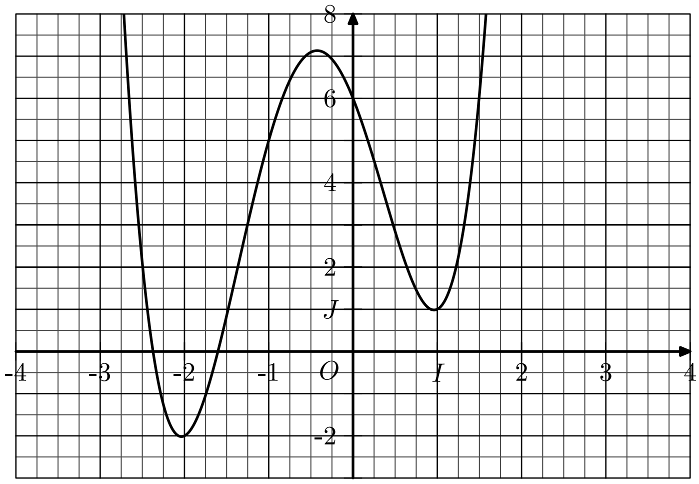
   c. la droite d'équation $y=4x$

Exercice 3509

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f : x \longmapsto \frac{3}{2}\cdot x^4 + 3\cdot x^3 - \frac{9}{2}\cdot x^2 - 5\cdot x + 6$$

On donne, ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$:



La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de cette fonction admet une droite (d) de coefficient directeur 1 comme tangente en deux points.

Déterminer l'equation de cette droite et les coordonnées de ces deux points.

2. Dérivées de fonctions composées :

Exercice 95

On considère la fonction f définie par :

$$f\colon x \longmapsto \sqrt{-2x^2 - x + 6}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

Exercice 3506

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonction suivantes :

a. $f(x) = \left(3\cdot x + 5\right)^5$

b. $g(x) = \dfrac{1}{3\cdot x^4 + 11}$

c. $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

d. $j(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

Exercice 2337

Le tableau présente pour chaque ligne une fonction et l'expression de la dérivée. Etablir l'exactitude de chaque ligne.

Fonction	Image de x	Nombre dérivé en x
f	$(3x+2)^6$	$18\cdot(3x+2)^5$
g	$4\cdot(3-2x)^4$	$-32\cdot(3-2x)^3$
h	$\dfrac{1}{-2x^2+3x+1}$	$\dfrac{4x-3}{\left(2x^2-3x-1\right)^2}$
j	$\sqrt{5x^2+6x-2}$	$\dfrac{5x+3}{\sqrt{5x^2+6x-2}}$
k	$\dfrac{2x-1}{\sqrt{3-x}}$	$\dfrac{2x-11}{2\cdot(x-3)\cdot\sqrt{3-x}}$

Exercice 5217

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]$ par la relation par la relation suivante :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$$

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en -1

Exercice 5065

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x)=\frac{-x^2+4x-3}{x^2-4x+4}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Montrer que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$$f'(x)=-\frac{2}{(x-2)^3}$$

3. On considère la fonction g définie par la relation : $g(x)=f\big(2x-1\big)$

   a. Donner l'expression simplifiée du nombre $g(x)$ en fonction de x.

   b. Donner l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g.

3. Dérivées de fonctions :

Exercice 2841

Déterminer l'expression, sous une forme simplifiée, des fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x)=\sqrt{\frac{1}{3}x-2}$ b. $g(x)=\big(\sqrt{x}+1\big)^3$

c. $h(x)=\big(3x^2-2x+1\big)\sqrt{x}$ d. $j(x)=(2x+1)\cdot\sqrt{3-x}$

Exercice 119

Déterminer l'expression de la fonction dérivée pour chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f\colon x\longmapsto\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ b. $g\colon x\longmapsto(2x+1)\cdot\sqrt{3x-1}$

Exercice 2826

Déterminer, pour chaque fonction, l'expression de la fonction dérivée :

a. $f:x\longmapsto\big(4x-2\big)^7$ b. $g:x\longmapsto\frac{1}{5-3x}$

c. $h:x\longmapsto\sqrt{3x-1}$ d. $j:x\longmapsto\big(3-2x\big)^3\cdot\sqrt{4x+1}$

Donner l'expression de la fonction j sous la forme d'un quotient où :

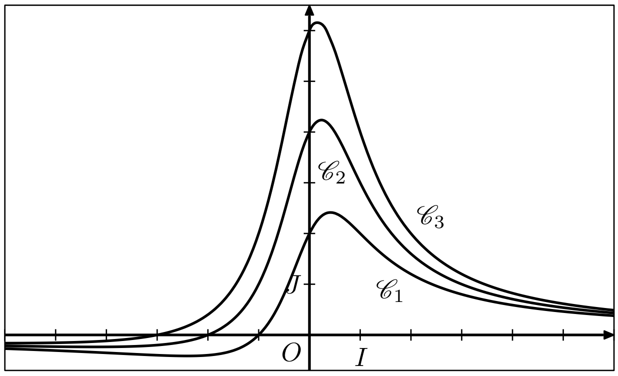
- *Le dénominateur est* $\sqrt{4x+1}$
- $\big(3-2x\big)^2$ *est en facteur au numérateur.*

Exercice 6810

On considère pour tout entier naturel n non-nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f_n(x)=\frac{2\cdot\big(x+n\big)}{1+x^2}$$

Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.



1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f_n'.

2. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\big(d_n\big)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

3. a. Etablir l'égalité suivante :

   $$n\cdot x^3-\big(2\cdot n+1\big)\cdot x^2+\big(n+2\big)\cdot x-1=\big(x-1\big)^2\cdot\big(n\cdot x-1\big)$$

   b. Etudier la position relative de la droite $\big(d_n\big)$ et de la courbe $\mathscr{C}_n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

4. Etude derivee :

Exercice 5752

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x)=\sqrt{6x^2+13x-5}$$

1. Justifier que la fonction f admet pour ensemble de définition la partie I de $\mathbb{R}$ définie par :

$$I=\Big]-\infty\,;-\frac{5}{2}\Big]\cup\Big[\frac{1}{3}\,;+\infty\Big[.$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur son ensemble de définition I.

Exercice 5062

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x)=(5x^2+3x+2)^5$$

1. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f

Exercice 2325

On considere deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\Big[\frac{5}{3}\,;+\infty\Big[$ par :

$$f(x)=2\big(3-2x\big)^5\quad;\quad g(x)=\sqrt{3x-5}$$

1. Déterminer l'expression des fonctions dérivées f' et g' associées aux fonctions f et g.

2. a. Déterminer le signe des fonctions f' et g' sur leur ensemble dérivation.

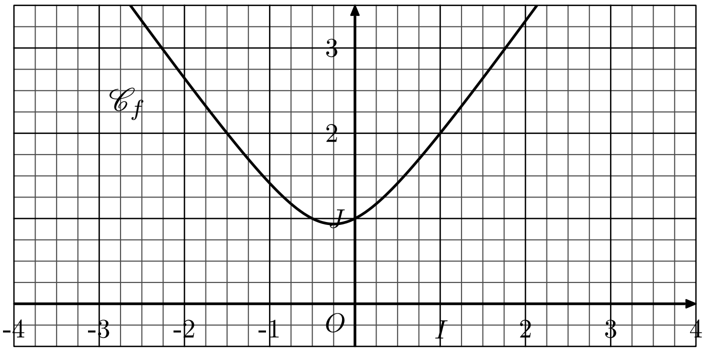
   b. Dresser le tableau de variation de ces deux fonctions.

Exercice 5063

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$f(x) = \sqrt{2x^2+x+1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f.
3. Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



a. Déterminer l'équation de la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

b. Tracer la droite (d) dans le repère ci-dessus.

Exercice 3510

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\cdot x+1\right)^4$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.

2. On considère la fonction g définie par la relation :

$g(x) = \sqrt{x^2-2x+3}$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g.

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

b. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

Exercice 2348

Soit f la fonction définie par la relation :

$f : x \longmapsto (x+5)\sqrt{1-2x}$

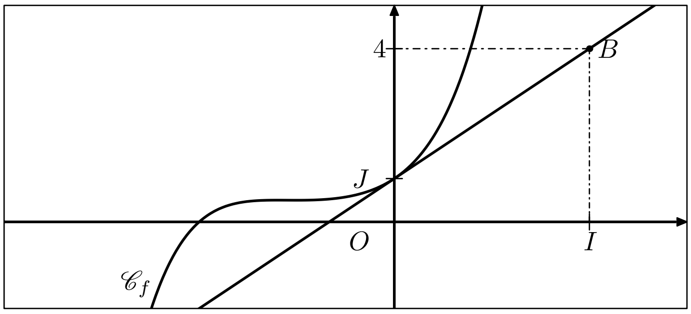
1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.
3. Dresser le tableau de signe de f'.
4. En déduire le tableau de variation de la fonction f
5. Justifier que f admet un extrémum global en $-\dfrac{4}{3}$

Exercice 6163

On considère la fonction f définie par la relation :

$f(x) = (a\cdot x+1)\cdot\left(2x^2+x+1\right)^2$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal donné ci-dessous, on représente la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



La droite (d) passe par les points J et $B(1\,;4)$.

1. a. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point J.

b. Déterminer le coefficient de la droite (JB).

c. Démontrer que tout réel x, on a :

$f'(x) = \left[10ax^2+(3a+8)\cdot x+(a+2)\right]\cdot(2x^2+x+1)$

d. On suppose que la droite (JB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point J. Déterminer la valeur de a. Justifier votre réponse.

2. On admet que f' a pour expressions :

$f'(x) = \left(10x^2+11x+3\right)\left(2x^2+x+1\right)$

Déterminer les sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Lien entre derivee et nombre derivee :

Exercice 5064

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0} \frac{(3+h)^4-81}{h}$

b. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0} \frac{\sqrt{6\cdot h+1}-1}{h}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{(x^2+1)^8-1}{x}$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{\sqrt{x^2+x+4}-2}{x}$

Exercice 5829

Soit f une fonction numérique dérivable.

1. Soit $a\in\mathcal{D}_f$. Etablir la limite suivante :

$$\lim_{\substack{x\mapsto a\\ x\neq a}} \frac{x\cdot f(a)-a\cdot f(x)}{x-a} = f(a)-a\cdot f'(a)$$

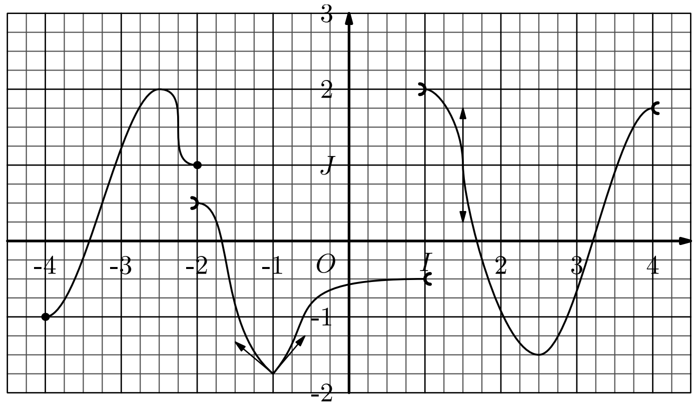
On posera : $x=a+h$.

2. En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto a\\ x\neq a}} \frac{x^3\cdot a-a^3\cdot x}{x-a}$

6. Continuite :

Exercice 3537

Ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ; cette courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse 1,5 :



1. Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Déterminer graphiquement l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.

3. Déterminer les limites suivantes :

   a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^-} f(x)$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^+} f(x)$

   c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^-} f(x)$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^+} f(x)$

4. a. Combien existe-t-il de nombres a tels que :
   $\displaystyle\lim_{x\mapsto a^-} f(x) \neq \lim_{x\mapsto a^+} f(x)$

   b. Quelle particularité graphique ont les points d'abscisse a vérifiant une telle condition ?

Exercice 3538

La partie entière de 5,5 est 5 ; pour étendre, cette notion à l'ensemble des nombres réels *(et particulièrement aux nombres négatifs)*, on définit la partie entière d'un nombre x, qu'on note $E(x)$, de la manière suivante :

> *"$E(x)$ est le plus grand entier de l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à x"*

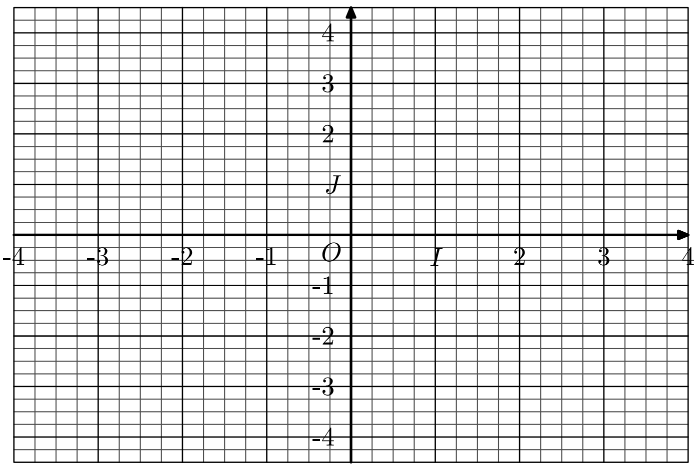
1. a. Supposons que $x=-2{,}5$, justifier que $E(x)=-3$.

   b. Compléter le tableau suivant :

x	$-4{,}5$	-4	$-3{,}9$	$-3{,}2$	-3
$E(x)$					

   c. Justifier l'encadrement suivant pour tout nombre réel x :
   $E(x) \leqslant x < E(x)+1$

2. a. On considère le repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous ; effectuer la représentation graphique de la fonction E sur $[-4\,;4]$



   b. Quelles particularités possède cette courbe ?

Exercice 5825

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation :
$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

1. Justifier que la fonction h n'est pas continue en 0.

2. Déterminer les deux limites suivantes :
   $\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto0^-\\x\neq0}} f(x)$; $\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto0^+\\x\neq0}} f(x)$

Exercice 3539

1. On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

   b. Déterminer la valeur des deux limites suivantes :
   $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} f(x)$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+} f(x)$

   c. Peut-on dire que la fonction f est continue en 0 ?

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{pour } x\neq0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$
   Justifier que la fonction f est continue en 0.

7. Dérivabilité :

Exercice 3541

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :
$$\begin{cases} f(x) = x^2+3x+3 & \text{pour tout } x\in\left]-\infty\,;-1\right] \\ f(x) = \dfrac{2}{x^2+1} & \text{pour tout } x\in\left]-1\,;+\infty\right[\end{cases}$$

1. a. Effectuer le tracé de la fonction f à l'aide de votre calculatrice.

   b. Faire une conjecture sur la continuité et sur la dérivabilité de la fonction f.

2. Justifier que la fonction f est continue en -1.

3. Justifier que la fonction f est dérivable en -1.

Exercice 3600

A - Etude d'une fonction :

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{x^2-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

2. a. Etudier les deux limites suivantes :

$$\lim_{h\mapsto 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\quad;\quad\lim_{h\mapsto 0^-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

   b. Etudier la dérivabilité de la fonction f en -1 et en 1.

3. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

B - Prolongement par continuité :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} g(x)=f(x) & \text{pour } x\in\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[\\ g(x)=-x^3+x^2+x-1 & \text{pour } x\in\left[-1\,;1\right] \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction g. Justifier vos affirmations.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

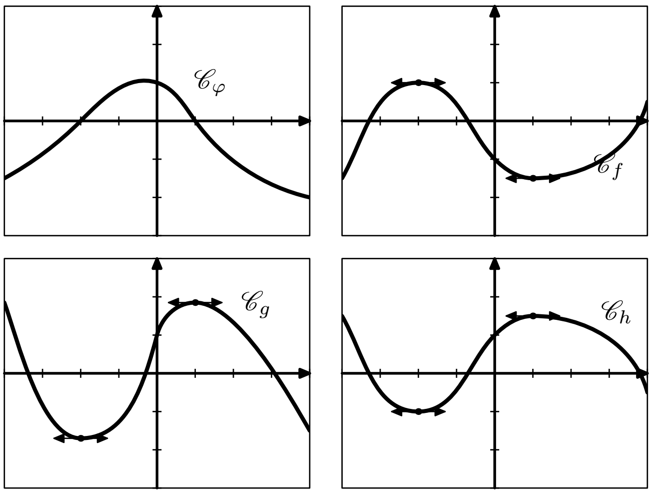
4. Justifier l'existence d'un unique nombre α appartenant à $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

   $g(\alpha)=2\quad;\quad 2<\alpha<2{,}1$

8. *Introduction aux primitives :*

Exercice 3575

On considère quatre fonctions φ, f, g, h définies sur l'intervalle $[-4\,;4]$. Leurs courbes représentatives sont données, ci-dessous, dans un même repère orthonormé :

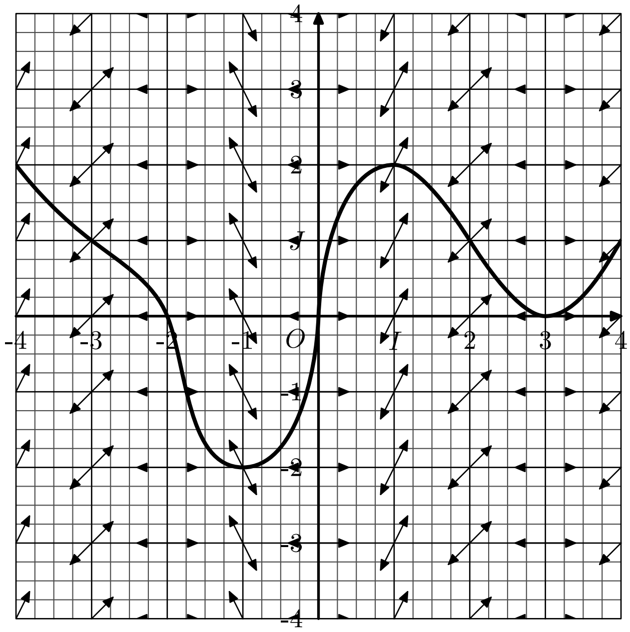


Quelle fonction, parmi f, g et h, peut admetttre la fonction φ comme fonction dérivée ?

Exercice 3560

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\,;4]$ et admettant la fonction f' comme dérivée.

Dans le repère ci-dessous, est tracée la courbe représentative de la fonction f'.



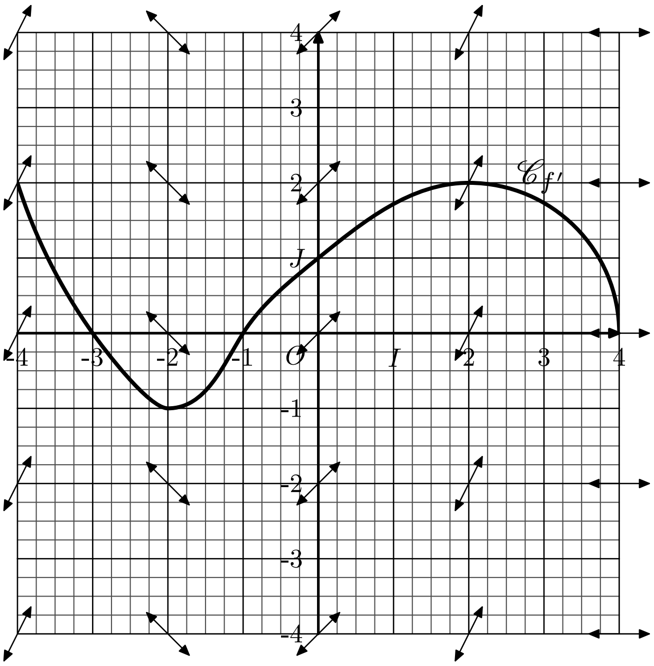
1. a. Donner le coefficient directeur de toutes les tangentes représentées sur la droite d'équation x=1.

   b. Quelle est la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 1 ?

2. Tracé une représentation "*possible*" de la fonction f dans ce repère.

Exercice 3561

On considère une fonction f dérivable sur $[-4\,;4]$. Dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_{f'}$ de la fonction f' dérivée de la fonction f.



1. a. Quelle est le nombre dérivée de la fonction f en -2.

   b. Tout au long de la droite d'équation $x=-2$ sont représentés des tangentes ; quel est le coefficient de ces tangentes.

2. Tracer une courbe représentative $\mathscr{C}_f$ acceptable de la fonction f dont les tangentes aux points d'abscisses -4, -2, 0, 2, 4 sont, dans chaque cas, une des tangentes proposées sur le graphique.

9. Tableau de signe sans théorème des valeurs intermédiaires :

Exercice 2927

1. Soit n un entier naturel non-nul quelconque. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

   $$f(x) = \big(1+x\big)^n - 1 - n{\cdot}x$$

   Etablir le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

2. Etablir l'inégalité ci-dessous pour tout nombre x positif et tout entier naturel n strictement positif :

   $$\big(1+x\big)^n \geqslant 1 + n\cdot x$$

L'inégalité établie à la dernière question s'appelle : ***Inégalité de Bernoulli***

Exercice 5102

1. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $g(x) = -8x^3 + 4x - 4$

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction g.
   (on utilisera des valeurs approchées pour compléter le tableau)

   b. En observant que $g(-1)=0$, dresser le tableau de signe de la fonction g.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = \frac{2x^2+1}{\big(2x^2+2x+3\big)^2}$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

   b. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   c. Etablir que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est donnée par la relation :

   $$f'(x) = \frac{-8x^3+4x-4}{(2x^2+2x+3)^3}$$

   d. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   (on utilisera des valeurs approchées pour compléter le tableau)

   e. Dresser le tableau de signe de la fonction f.

10. Theoreme des valeurs intermediaires :

Exercice 3543

On considère une fonction f qui admet le tableau de variation suivant :

x	-5	1	5	10^3
Variation de f	4 ↘	-6 ↗	-1 ‖ 5 ↘	-13

1. Justifier que la fonction f s'annule deux fois sur son ensemble de définition.

2. Soit m un nombre réel. Discuter en fonction de la valeur de m du nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

Exercice 6239

On considère la fonction f définie, continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ telle que :

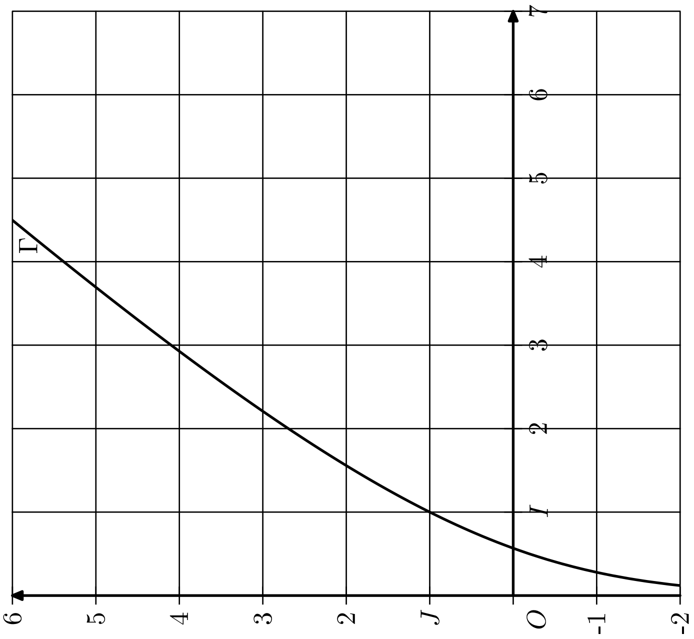
$$\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = +\infty$$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\big(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\big)$ du plan.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution dans $\left]0\,;+\infty\right[$.

   On note α_n cette solution.

2. Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$. Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.



11. Etudes de sous-fonctions :

Exercice 3557

1. On considère la fonction polynôme P définie pour tout réel x par :

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

a. Etudier les variations de P.

b. Montrer que l'équation $P(x)=0$ admet une racine réelle et une seule, α, et que α appartient à l'intervalle $]1{,}6\,;1{,}7[$

2. Soit D l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathcal{D}$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à une repère orthonormé *(on prendra comme unité 4 cm)*.

a. Etudier les variations de f *(on utilisera pour cela les résultats du 1.)*.

b. Ecrire une équation de la droite (D) tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D) dans l'intervalle $]-1\,;1[$.

c. Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.

Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.

Exercice 3544

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}-1}{x+1}$$

Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

b. Déterminer les limites de la fonction f en ses bornes.

c. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, préciser lesquelles.

2. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

3. a. Justifier que la fonction f ne s'annule qu'une fois sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

b. Tracer la courbe représentative de la fonction f à l'aide de votre calculatrice ; utiliser les fonctions de votre calculatrice pour déterminer une valeur approchée de ce zéro de la fonction f.

12. Etudes de dérivée et dérivée seconde :

Exercice 5812

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre réel x est définie par l'expression :

$f(x) = 3\cdot\sqrt{x^2+1} - 2\cdot x$

Le but de l'exercice est de montrer que la fonction f admet un maximum global et d'obtenir une valeur approchée.

1. a. Montrer que la dérivée seconde de la fonction f admet pour expression :

$$f''(x) = \frac{3}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

b. Etablir les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f'(x) = -5 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f'(x) = 1$$

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f'.

2. a. Justifier que la fonction f' s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$.

b. On note α l'unique solution de l'équation : $f'(x)=0$.
Justifier brièvement que le nombre α appartient à l'intervalle $[0,8\,;0,9]$.

3. a. Dresser le tableau de signe de la fonction f'.

b. Justifier que la fonction f admet un minimum global qui est atteint pour $x=\alpha$.

Exercice 3562

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x^2+1}$$

1. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f, ainsi que celle de la dérivée seconde f''.

2. a. Etudier le signe de la fonction f''.

b. En déduire le tableau de variation de la fonction f'.
(Une valeur approchée des extrémums sera cherchée à l'aide de la calculatrice)

3. a. Montrer que la fonction f' s'annule pour $x=1$ et aussi en un nombre α vérifiant l'encadrement :
$0,2 < \alpha < 0,3$

b. En déduire le tableau de signe de la fonction f'.

4. a. Déterminer la valeur des deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x)$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
(Une valeur approchée des extrémums sera cherchée à l'aide de la calculatrice)

13. Dichotomie :

Exercice 3534

On considère la fonction f définie par :
$f(x) = x^3 + 3{\cdot}x$

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b. Justifier que le nombre 5 admet un unique antécédent par la fonction f ; on notera α ce nombre.

2. On pose pour valeur $a_0=0$ et $b_0=2$. On souhaite construire par la méthode de dichotomie les deux suites (a_n) et (b_n) adjacentes et convergentes vers α.

a. Compléter le tableau ci-dessous :

	a_n	c_n	b_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
$n=0$						
$n=1$						
$n=2$						
$n=3$						
$n=4$						
$n=5$						

b. Avec quelle précision obtient-on la valeur de α à l'aide du tableau.

