

Terminale S/Annales sur l'intégration

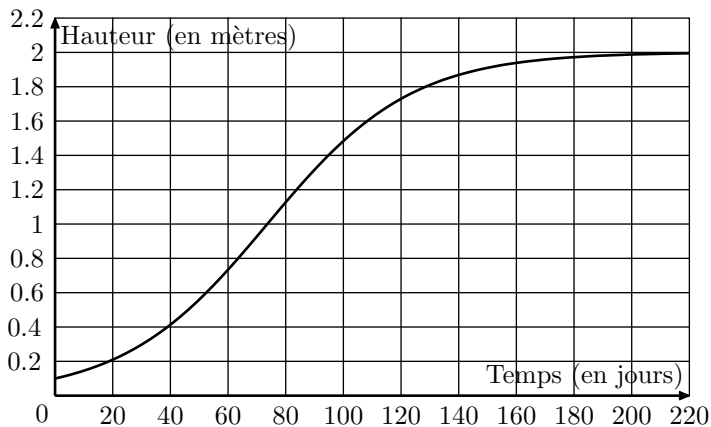
1. Etudes de fonctions :

Exercice 5429



Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique ci-dessous représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.



On décide de modéliser cette croissance par une fonction logarithmique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t=0$, le plant mesure $0,1\text{ m}$ et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m .

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0; 250]$ par :

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19 \cdot e^{-0,04t}}$$

- Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f).
En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 250]$.
- Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5\text{ m}$.
- a. Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; 250]$, on a : $f(t) = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$.

Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 250]$ par $F(t) = 50 \cdot \ln(e^{0,04t} + 19)$ est une primitive de la fonction f .

- Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50; 100]$.
En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

- On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f . La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t .
En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci.
Estimer alors la hauteur du plant.

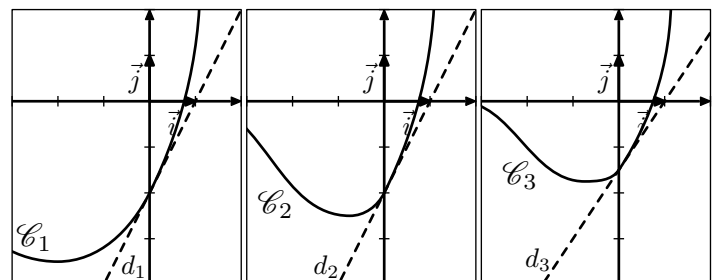
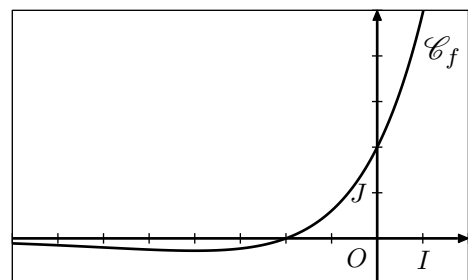
Exercice 6009



Soit f la fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe \mathcal{C} et trois autres courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.



- Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
- On désigne par F une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .
 - A l'aide de la courbe \mathcal{C} , déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
 - L'une des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ est la courbe repré-

tive de la fonction F .

Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la partie A est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

1. L'observation de la courbe \mathcal{C} permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

a. Démontrer que pour tout réel x : $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+4) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

b. En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose : $I = \int_0^1 f(x) dx$.

a. Interpréter géométriquement le réel I .

b. Soient u et v les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$$

Vérifier que : $f = 2 \cdot (u \cdot v + u \cdot v')$.

c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .

3. On donne l'algorithme ci-dessous :

Variables : k et n sont des nombres entiers naturels
 s est un nombre réel

Entrée : Demander à l'utilisateur la valeur de n

Initialisation : Affecter à s la valeur 0

Traitement : Pour k allant de 0 à $n-1$

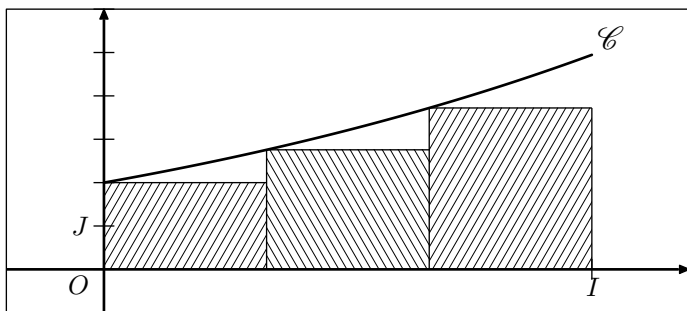
Affecter à s la valeur de $s + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$

Fin de boucle

Sorite : Afficher s

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n .

a. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



b. Que dire de la valeur de s_n donnée par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

Exercice 6046



Partie A

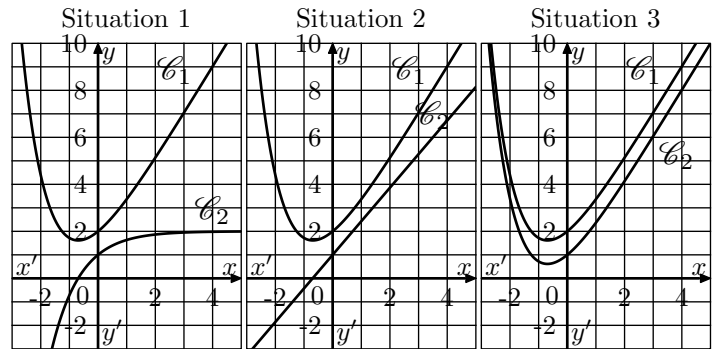
f est une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . f' est la fonction dérivée de la fonction f .

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme \mathcal{C}_1 la courbe représentative de la fonction f et \mathcal{C}_2 la courbe représentative de la fonction f' .

Le point A de coordonnées $(0; 2)$ appartient à la courbe \mathcal{C}_1 .

Le point B de coordonnées $(0; 1)$ appartient à la courbe \mathcal{C}_2 .

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative \mathcal{C}_1 de la fonction f . Sur l'une d'entre elles, la courbe \mathcal{C}_2 de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.



2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe \mathcal{C}_1 en A .

3. On sait que pour tout réel x , $f(x) = e^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

a. Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

b. Prouver que $a = 2$.

4. Etudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

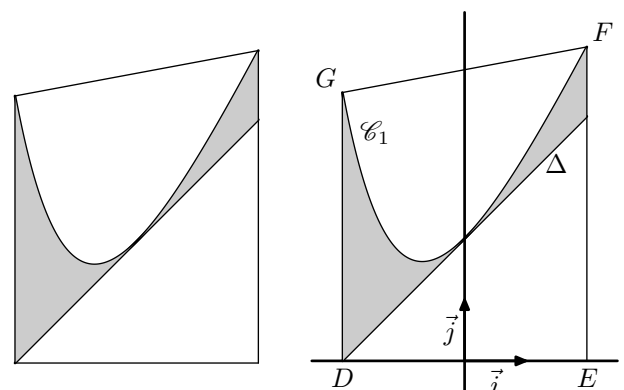
Partie B

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = f(x) - (x+2)$.

1. a. Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur \mathbb{R} .

b. En déduire la position de la courbe \mathcal{C}_1 par rapport à la droite Δ .

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe \mathcal{C}_1 et de la droite Δ , comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.



Le contour du logo est représenté par le trapèze $DEFG$ où :

- D est le point de coordonnées $(-2; 0)$,
- E est le point de coordonnées $(2; 0)$,
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe \mathcal{C}_1 ,
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe \mathcal{C}_2 .

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ , la courbe \mathcal{C}_1 , la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

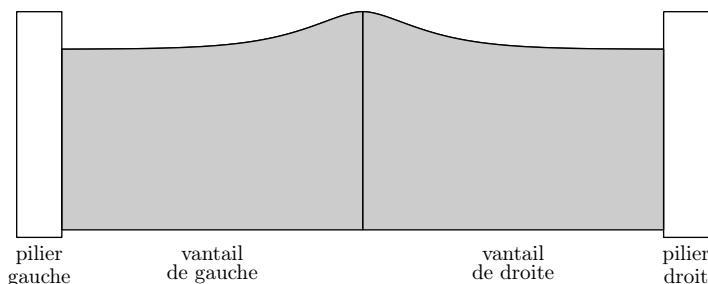
2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo co-

lorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).

Exercice 6266



On désire réaliser un portail comme indiqué ci-dessous. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.



Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-4x} + b$$

où b est un nombre réel. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.

- Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 2]$.
 - En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.

- Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à $1,5 m$.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-4x} + \frac{5}{4}$$

Partie B : détermination d'une aire

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à $0,05 m$ de hauteur du sol.

- Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

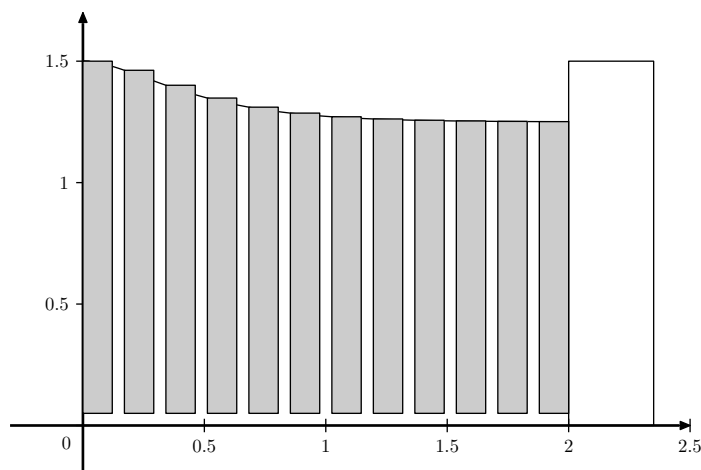
$$F(x) = \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right) \cdot e^{-4x} + \frac{5}{4} \cdot x$$

est une primitive de la fonction f .

- En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet "vantail" sans faire référence à son environnement).

Partie C : utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur $0,12 m$, espacées de $0,05 m$. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail et le bas de chaque planche à $0,05 m$ de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.

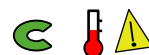


La distance entre le bas du portail et le sol est de $0,05 m$

- Donner l'aire de la planche de numéro k .
- Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

Variables : Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation : On affecte à S la valeur 0
 On affecte à X la valeur 0
Traitement : Tant que $X+0,17 < \dots$
 S prend la valeur $S+\dots$
 X prend la valeur $X+0,17$
 Fin de Tant Que
Affichage On affiche S .

Exercice 3168



Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{-x^2} \quad ; \quad g(x) = x^2 e^{-x^2}$$

On note respectivement \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée et rendue avec la copie.

- Identifier \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sur la figure fournie. (Justifier la réponse apportée).
- Etudier la parité des fonctions f et g (hors programme).
- Etudier le sens de variation de f et g . Etudier les limites éventuelles de f et de g en $+\infty$.
- Etudier la position relative de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Partie B

On considère la fonction G définie sur \mathbb{R} par :

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$$

- Que représente G pour la fonction g ?
- Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.
- Etudier le sens de variations de G sur \mathbb{R} .

On définit la fonction F sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{pour tout réel } x$$

- Démontrer que :

$$G(x) = \frac{1}{2} [F(x) - xe^{-x^2}] \quad \text{pour tout réel } x$$

(on pourra commencer par comparer les fonctions dérivées de G et de $x \mapsto \frac{1}{2} [F(x) - xe^{-x^2}]$).

On admet que la fonction F admet une limite finie ℓ en $+\infty$, et que cette limite ℓ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine \mathcal{A} limité par la courbe \mathcal{C}_f et les demi-droites $[O; \vec{i})$ et $[O; \vec{j})$.

5. a. Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

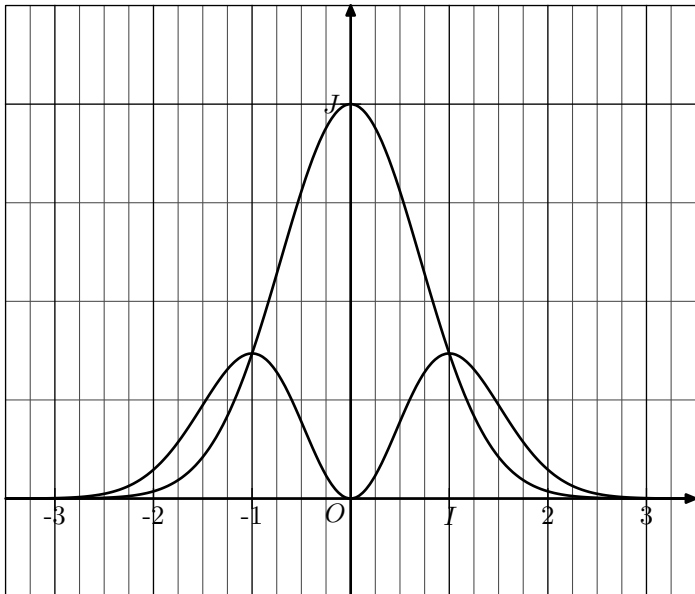
b. Interpréter en termes d'aires le réel :

$$N = \int_0^1 (1-t^2)e^{-t^2} dt.$$

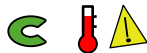
c. En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire \mathcal{P} en unités d'aire du domaine \mathcal{D} limité par la demi-droite $[O; \vec{i})$ et la courbe \mathcal{C}_g , justifier graphiquement que :

$$\int_0^1 (1-t^2)e^{-t^2} dt \geq \frac{\ell}{2}$$

(on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie)



Exercice 4017



Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$$

et l'on désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 3 cm .

- Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (\mathcal{C}) ?
- Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f pour x appartenant à $[0; +\infty[$.
- Déterminer une équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}) en son point d'abscisse 0.
- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique u . Montrer que u appartient à $[1; 2]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u .

5. Tracer (T) et (\mathcal{C}) sur la même figure.

6. a. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$:

$$\frac{x-1}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$$

b. En déduire l'aire en cm^2 du domaine plan limité par (T) , (\mathcal{C}) et la droite d'équation $x=1$ (on admettra que T est au-dessus de (\mathcal{C})).

Partie B

n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$$

1. Calculer $f'_n(x)$ et donner son signe sur $[0; +\infty[$. Préciser $f_n(0)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

Dresser le tableau de variations de f_n .

2. a. Calculer $f_n(n)$; quel est son signe ?

b. Démontrer par récurrence que, pour tout n de \mathbb{N} :
 $e^{n+1} > 2 \cdot n + 1$

En déduire le signe de $f_n(n+1)$.

c. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique sur $[n; n+1]$; cette solution est notée u_n .

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$.

4. a. En remarquant que, pour tout x de $[0; +\infty[$:

$$\frac{x-n}{x+n} = 1 - \frac{2 \cdot n}{x+n}$$

Montrer que la valeur moyenne M_n de f_n sur $[0; u_n]$ est égale à :

$$1 - \frac{1}{u_n} + \frac{e^{-n}}{u_n} - 2 \cdot \left(\frac{n}{u_n}\right) \cdot \ln\left(\frac{u_n}{n} + 1\right)$$

b. En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

Exercice 6008



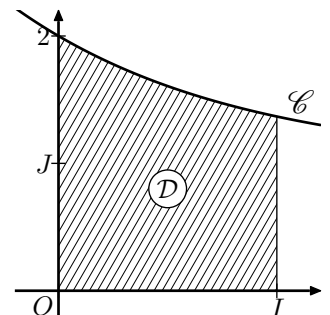
On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = 1 + e^{-x} \quad \text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } [0; 1].$$

On admet que :

$$g(x) > 0, \quad \text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } [0; 1].$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal, et \mathcal{D} le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} , d'autre part entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. La courbe \mathcal{C} et le domaine \mathcal{D} sont représentés ci-contre.

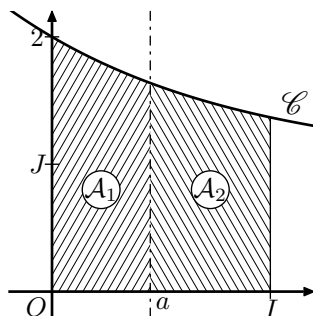


Le but de cet exercice est de partager le domaine \mathcal{D} en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leq a \leq 1$. On note \mathcal{A}_1 l'aire du domaine compris entre la courbe \mathcal{C} , l'axe (Ox) , les droites d'équations $x=0$ et $x=a$, puis \mathcal{A}_2 celle du domaine compris entre la courbe \mathcal{C} , (Ox) et les droites d'équation $x=a$ et $x=1$.

\mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont exprimées en unités d'aire.



1. a. Démontrer que : $\mathcal{A}_1 = a - e^{-a} + 1$.

b. Exprimer \mathcal{A}_2 en fonction de a .

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}$$

a. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0; 1]$ en un réel α . Donner la valeur de α arrondie au centième.

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.

Dans cette partie, on se propose de partager le domaine \mathcal{D} en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y=b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier l'inégalité $b < 1 + \frac{1}{e}$. On pourra utiliser un argument graphique.

2. Déterminer la valeur exacte du réel b .

Exercice 6267



Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (*pixels*) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de façon suivante :

- $x=0$ pour le blanc ;
- $x=1$ pour le noir ;
- $x=0,01$; $x=0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x=0,99$ par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires (*du clair au foncé*).

L'image A , ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites "*fonctions de retouche*".

Une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ est dite "*fonction de retouche*" si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0)=0$;
- $f(1)=1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si

$f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.

- si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
- Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \simeq 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

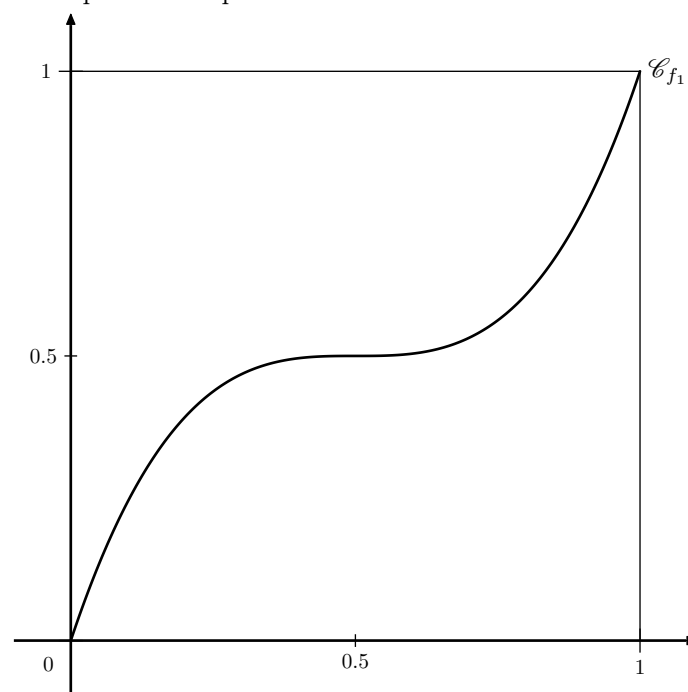
0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$

- a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.
- b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leq x$, à l'aide du graphique donné ci-dessous, en faisant apparaître les pointillés utiles.



Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombriement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $f_2(x) = \ln [1 + (e - 1) \cdot x]$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle $[0; 1]$ la fonction g par :

$$g(x) = f_2(x) - x.$$

a. Etablir que, pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$:

$$g'(x) = \frac{(e-2) - (e-1) \cdot x}{1 + (e-1) \cdot x}$$

- b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; 1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.
- c. Etablir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0; 1]$ deux solutions α et β , avec $\alpha < \beta$.

On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$; $0,85 < \beta < 0,86$

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

- Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.
Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables : x (nuance initiale)
 y (nuance retouchée)
 E (écart)
 c (compteur)
 k

Initialisation : c prend la valeur 0

Traitement : Pour k allant de 0 à 100, faire
 x prend la valeur $\frac{k}{100}$
 y prend la valeur $f(x)$
 E prend la valeur $|y - x|$
 Si $E \geq 0,05$, faire
 c prend la valeur $c+1$
 Fin si

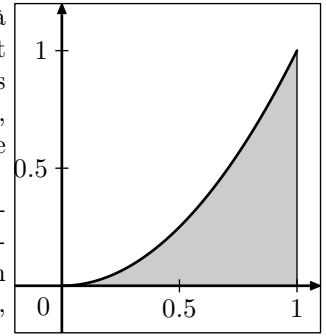
Fin pour

Sortie : Afficher c

- Quelle valeur arrichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la partie A ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) \leq x$.



On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire \mathcal{A}_f de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f , et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image celle correspond à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouches :

$$f_3(x) = x \cdot e^{(x^2-1)} \quad ; \quad f_4(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}$$

- Calculer \mathcal{A}_{f_3} .
 - Calculer \mathcal{A}_{f_4} .
- De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

2. Etudes de familles de fonctions :

Exercice 6259



Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par \mathcal{C}_1 la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur \mathbb{R} par :

$$f_1(x) = x + e^{-x}$$

- Justifier que \mathcal{C}_1 passe par le point A de coordonnées $(0; 1)$.
- Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1 . On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

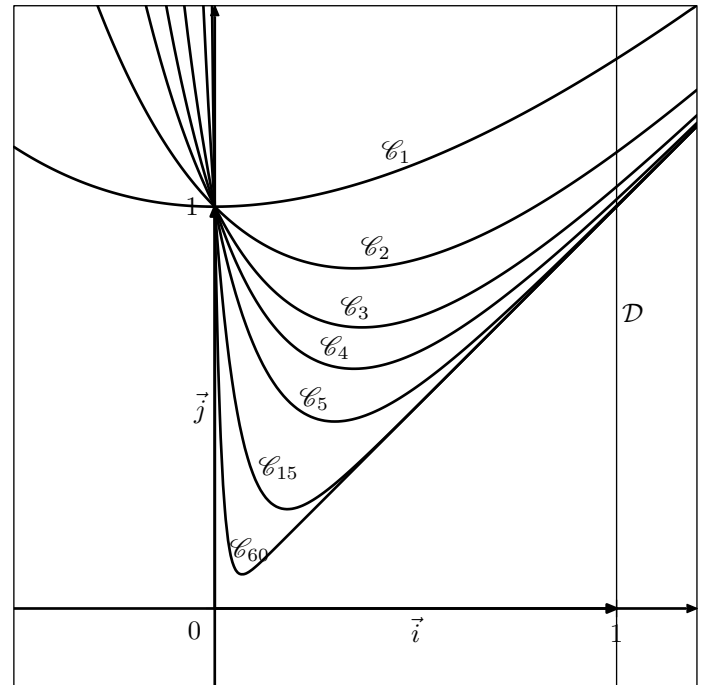
L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$I_n = \int_0^1 (x + e^{-n \cdot x}) dx$$

- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, pour tout entier naturel n , on note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n(x) = x + e^{-n \cdot x}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe \mathcal{C}_n pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite \mathcal{D} d'équation $x=1$.



- Interpréter géométriquement l'intégrale I_n .
 - En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.
- Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1) \cdot x} \cdot (1 - e^x) dx$$

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n) .

Exercice 6258



Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

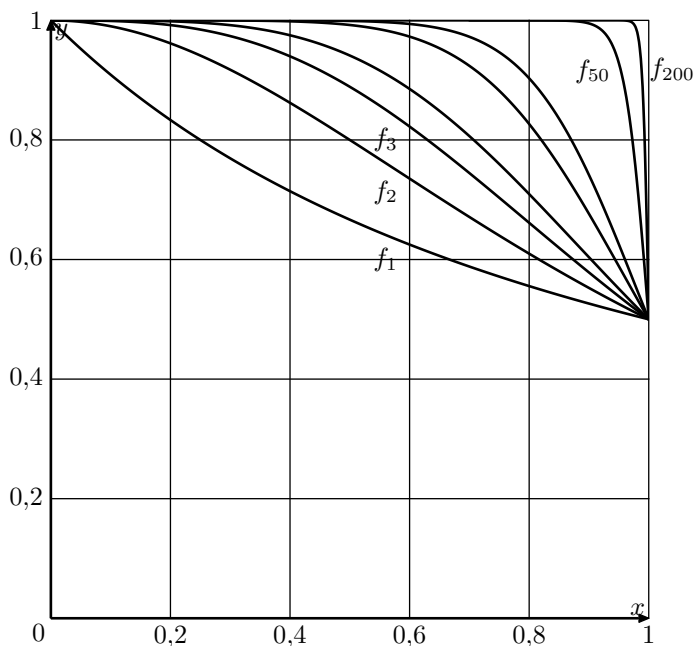
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le nombre I_n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracés ci-après. En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.



2. Calculer la valeur exacte de I_1 .
3. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$

et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $I_n \leq 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$$

5. Calculer l'intégrale : $\int_0^1 (1-x^n) dx$.

6. A l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables : n, p et k sont des entiers naturels.
 x et I sont des réels.

Initialisation : I prend la valeur 0.

Traitement : Demander un entier $n \geq 1$.
 Demander un entier $p \geq 1$.
 Pour k allant de 0 à $p-1$ faire :
 x prend la valeur $\frac{k}{p}$
 I prend la valeur $I + \frac{1}{1+x^n} \times \frac{1}{p}$
 Fin Pour
 Afficher I

- a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n=2$ et $p=5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millièème.

k	x	I
0		
4		

- b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n .

3. Encadrement d'intégrales :

Exercice 3232



On considère la fonction f , définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{e^t}{t}$$

1. a. Justifier la continuité de f sur $[1; +\infty[$.
 b. Montrer que f est croissante sur $[1; +\infty[$

2. **Restitution organisée de connaissances**

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

Pour tout réel x_0 de $[1; +\infty[$, on note $\mathcal{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équa-

tions $x=1$ et $x=x_0$.

On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1; +\infty[$ est une primitive de f .

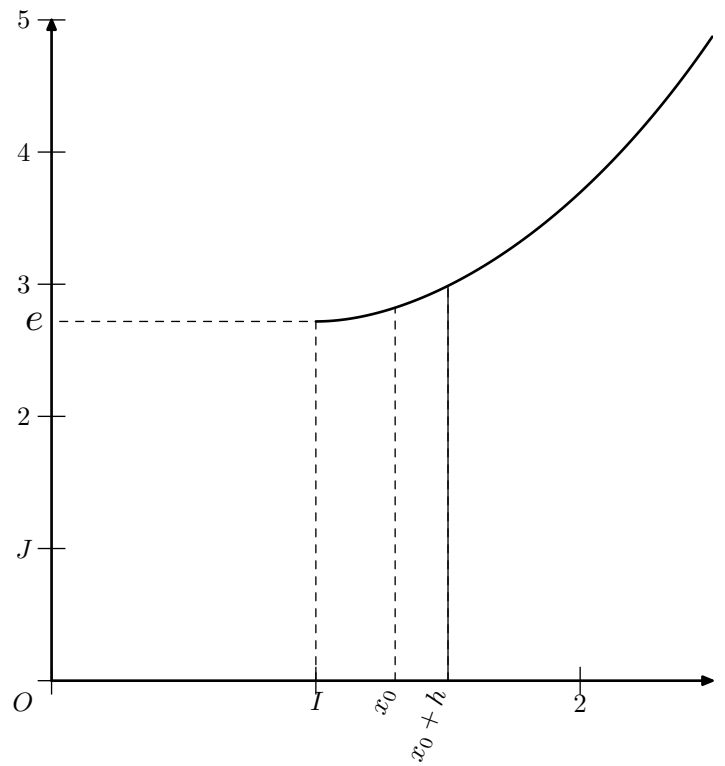
- a. Que vaut $\mathcal{A}(1)$?
 b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1; +\infty[$ et h un réel strictement positif.

Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$$

- c. Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ tel que $x_0+h \geq 1$?
 d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction \mathcal{A} ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction \mathcal{A} .

e. Conclure.



4. Suites :

Exercice 3998



On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 2 \end{cases} ; \quad v_n = u_n - \ln n \text{ pour } n \geq 1$$

1. a. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n} ; \quad 0 \leq v_n \leq 1$$

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

b. En déduire le sens de variations de la suite (v_n) .

4. Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ). Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 5171



Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + e^{-x}$$

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère

orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

1. Etudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que (\mathcal{C}) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation. (Question hors programme 2012).

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 ; \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leq x$.
On pourra étudier la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :
 $g(x) = x - \ln(1+x)$.
2. En déduire, que pour tout entier naturel n non nul :
 $\ln(n+1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non-nul :
 $f[\ln(n)] = \ln(n) + \frac{1}{n}$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :
 $\ln(n) \leq u_n$.
5. En déduire la limite de $(u_n)_{n \geq 1}$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$

6. a. Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$

- b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
- $$u_n \leq 1 + \ln(n-1)$$

7. Pour tout entier supérieur ou égal à 2, on a montré que :
- $$\ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$$
- Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n \geq 2}$ converge vers 1.

5. Calculs d'intégrales, aires et volumes :

Exercice 3193



On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, (unité graphique : 5 cm)

Partie A. Etude de la fonction f

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
2. a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
b. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x . En déduire les variations de f sur \mathbb{R} .
c. Dresser le tableau des variations de f .
3. Tracer la courbe \mathcal{C} et ses asymptotes éventuelles dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Partie B. Quelques propriétés graphiques.

1. On considère les points M et M' de la courbe \mathcal{C} d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées du milieu A du segment $[MM']$.
Que représente le point A pour la courbe \mathcal{C} ?
2. Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y=1$, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$, \mathcal{A}_n désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire.
a. Calculer \mathcal{A}_n .
b. Etudier la limite éventuelle de \mathcal{A}_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Calcul d'un volume.

Soit λ un réel positif. On note $\mathcal{V}(\lambda)$ l'intégrale :

$$\mathcal{V}(\lambda) = \int_{-\lambda}^0 \pi [f(x)]^2 dx$$

On admet que $\mathcal{V}(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe \mathcal{C} obtenue pour $-\lambda \leq x \leq 0$.

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel x :
$$\frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{ae^x}{e^x + 1} + \frac{be^x}{(e^x + 1)^2}$$
2. Exprimer $\mathcal{V}(\lambda)$ en fonction de λ .
3. Déterminer la limite de $\mathcal{V}(\lambda)$ lorsque λ vers $+\infty$.

Exercice 6932



Les parties A et B sont indépendantes

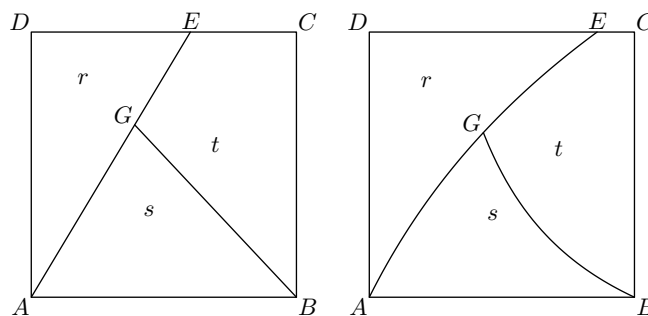
Le fabricant de cadenas de la marque "K" désire imprimer un logo pour son entreprise.

Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré $ABCD$, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C_1 et C_2 suivantes :

- **Condition C_1** : la lettre K doit être constituée de trois lignes :
 - ➔ une des lignes est le segment $[AD]$;
 - ➔ une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point E du segment $[DC]$;
 - ➔ la troisième ligne a pour extrémité le point B et le point G situé sur la deuxième ligne.
- **Condition C_2** : l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre 0,3 et 0,4, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées r, s, t sur les figures ci-après.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$.



Proposition A

Proposition B

Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales :

$$r = s = t = \frac{1}{3}$$

Déterminer les coordonnées des points E et G .

Partie B : étude de la proposition B

Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :

- la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout réel $x \geq 0$ par : $f(x) = \ln(2x+1)$;
- la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction g définie pour tout réel $x > 0$ par :
$$g(x) = k \left(\frac{1-x}{x} \right)$$

où k est un réel positif qui sera déterminé.

1. a. Déterminer l'abscisse du point E .
b. Déterminer la valeur du réel k , sachant que l'abscisse du point G est égale à $0,5$.
2. a. Démontrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie pour tout réel $x \geq 0$ par :
$$F(x) = (x + 0,5) \cdot \ln(2 \cdot x + 1) - x$$

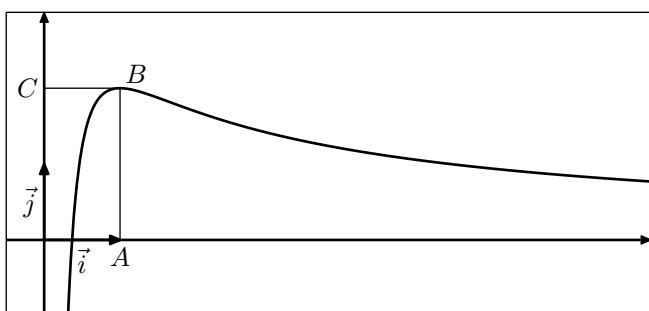
b. Démontrer que : $r = \frac{e}{2} - 1$

255. Exercices non-classés :

Exercice 6409



Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1; 0), (1; 2), (0; 2)$;
- la courbe \mathcal{C} passe par le point B et la droite (BC) est tangente à \mathcal{C} en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x : $f(x) = \frac{a+b \cdot \ln x}{x}$

1. a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x :
$$f'(x) = \frac{(b-a) - b \cdot \ln x}{x^2}$$

c. En déduire les réels a et b .
2. a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif :
$$f(x) = \frac{2}{x} + 2 \cdot \frac{\ln x}{x}$$

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f .
3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; 1]$.
b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1; +\infty[$ tel que :
 $f(\beta) = 1$.
Déterminer l'entier n tel que : $n < \beta < n+1$
4. On donne l'algorithme ci-dessous :

3. Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que :
$$s = [\ln(2)]^2 + \frac{\ln(2) - 1}{2}$$

La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?

Variables

a, b et m sont des nombres réels.

Initialisation

Affecter à a la valeur 0 .

Affecter à b la valeur 1 .

Traitement

Tant que $b-a > 0,1$

Affecter à m la valeur $\frac{1}{2} \cdot (a+b)$

Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m .

Sinon Affecter à b la valeur m .

Fin de Si

Fin de Tant que

Sortie

Afficher a .

Afficher b

- a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous :

	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

- b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?
- c. Modifier l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1} .
5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe \mathcal{C} partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.
 - a. Justifier que cela revient à démontrer que :
$$\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 1$$
 - b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

Exercice 3257



Partie A - Etude préliminaire d'une fonction f définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = (2-x)e^x - 1$

- Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
- Montrer que la fonction φ est continue et dérivable sur \mathbb{R} et étudier le signe de sa dérivée.
En déduire les variations de la fonction φ et préciser les valeurs de $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.
- Prouver que la fonction φ s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β . On prendra $\alpha < \beta$. Étudier alors le signe de la fonction φ sur l'ensemble des réels et récapituler cette étude dans un tableau.
- A l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} des valeurs α et β .
- Montrer que : $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$

Partie B - Etude d'une fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ et calcul intégral.

- Montrer que $e^x - x$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} . En déduire que f est définie sur \mathbb{R} .
- Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
- Calculer la dérivée f' de la fonction f puis, à l'aide des résultats de la **partie A**, construire le tableau des variations de f .
- Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$, le nombre α étant la plus petite des deux valeurs pour lesquelles la fonction φ de la partie **A** s'annule.
- Déterminer une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} . Donner une valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 0,01 près de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x} dx$$

Partie C - Etude de deux suites

- Préciser l'ensemble de définition D_g de la fonction g définie sur cet ensemble par $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$ où \ln désigne la fonction logarithme népérien.
Prouver que la fonction g est croissante sur son ensemble de définition et que l'image par g de l'intervalle $I = [-2; 0]$ est incluse dans cet intervalle.

- a. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

Montrer que u_1 appartient à l'intervalle $I = [-2; 0]$. Prouver par récurrence, à l'aide des variations de la fonction g , que la suite (u_n) a tous ses termes dans l'intervalle I et est croissante.

- b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$

Calculer le terme v_1 et montrer que :
 $-2 \leq u_1 \leq v_1 \leq v_0 \leq 0$.

Établir par récurrence, à l'aide de la croissance de la fonction g sur l'intervalle $[-2; 0]$, que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :

$$-2 \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq 0$$

Préciser le sens de variation de la suite (v_n) .

- a. Soit m la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$m(x) = x - \ln(1+x)$$

Montrer que m est croissante et calculer $m(0)$. En déduire que, pour tout x positif, on a :

$$\ln(1+x) \leq x$$

- b. Vérifier que, pour tout entier n :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right).$$

En déduire que : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}$

Sachant que, pour tout entier n , les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle $[-2; 0]$, donner un encadrement de $\frac{1}{2 - v_n}$ et établir que :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

Prouver alors que, pour tout entier naturel n ,

$$v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$$

Que peut-on en déduire pour la suite de terme général $v_n - u_n$ et pour les suites (u_n) et (v_n) ?

- Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-4} de u_{10} et v_{10} .