Terminale S/Annales sur les suites

1. Etudes de suites :

Exercice 6256

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 0$; $u_{n+1} = u_n + 2{\cdot}n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer u_1 et u_2.

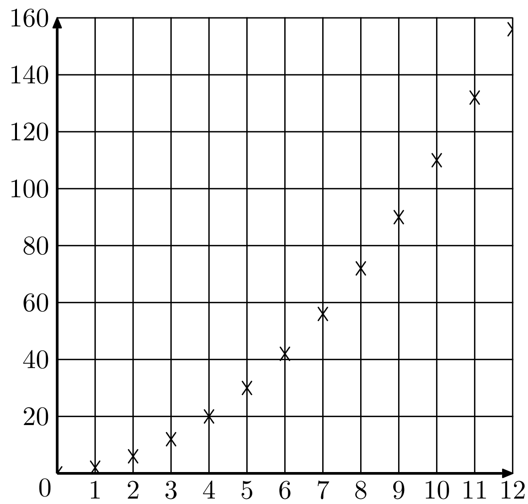
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	Algorithme2
Variables :	**Variables**
n est un entier naturel	n est un entier naturel.
u est un réel	u est un réel.
Entrée :	**Entrée :**
Saisir la valeur de n	Saisir la valeur de n
Traitement :	**Traitement :**
u prend la valeur 0	u prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n :	Pour i allant de 0 à $n-1$:
u prend la valeur $u+2{\cdot}i+2$	u prend la valeur $u+2i+2$
Fin pour	Fin pour
Sortie :	**Sortie :**
Afficher u	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. A l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.

b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n : $u_n = a{\cdot}n^2 + b{\cdot}n + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par :
$v_n = u_{n+1} - u_n$

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. On définit, pour tout entier naturel n :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$S_n = (n+1)(n+2)$

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$S_n = u_{n+1} - u_0$,
puis exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 5019

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a. Saisir un réel strictement positif non nul b $(b>a)$ Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANT QUE $n<N$ Affecter à n la valeur $n+1$ Affecter à u la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v.
Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a=4$, $b=9$ et $N=2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0<a<b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0=a$, $v_0=b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2} \quad ; \quad v_{n+1}=\sqrt{\frac{u_n^2+v_n^2}{2}}$$

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n>0 \quad ; \quad v_n>0$

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$v_{n+1}^2-u_{n+1}^2=\left(\frac{u_n-v_n}{2}\right)^2$$
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n\leqslant v_n$.

3. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

Exercice 3210

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0=1 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+n-1 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. a. Démontrer que pour tout $n\geqslant 3$: $u_n\geqslant 0$.

b. En déduire que pour tout $n\geqslant 4$: $u_n\geqslant n-2$.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On définit la suite (v_n) par : $v_n=4u_n-8n+24$

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$$u_n=7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n-6.$$

c. Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_n=x_n+y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

d. En déduire l'expression de $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ en fonction de n.

Exercice 3836

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1}-\dfrac{1}{4}\cdot u_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}\cdot u_n$

a. Calculer v_0.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

c. En déduire que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n=\dfrac{u_n}{v_n}$

a. Calculer w_0.

b. En utilisant l'égalité $u_{n+1}=v_n+\frac{1}{2}\cdot u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $w_{n+1}=w_n+2$.

d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$u_n=\frac{2\cdot n-1}{2^n}$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose :
$$S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+\cdots+u_n$$
Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$S_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$$

Exercice 6762

Soit u la suite définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n, par :
$$u_{n+1}=2\cdot u_n+2\cdot n^2-n$$
On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par :
$$v_n=u_n+2\cdot n^2+3\cdot n+5$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules `C2` et `B3` et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et u_n en fonction de n uniquement.

2. Suites monotones et bornées :

Exercice 5077

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0=3 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(u_n+\frac{7}{u_n}\right) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n>0$.

1. On désigne par f la focntion définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{7}{x}\right) \qquad (*)$$

Démontrer que la fonction f admet un minimum.
En déduire que pour tout entier naturel n : $\quad u_n \geqslant \sqrt{7}$

2. a. Soit n un entier naturel quelconque. Etudier le signe de $u_{n+1}-u_n$.

b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

c. On déduit de la relation $(*)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que : $\quad \ell=\frac{1}{2}\cdot\left(\ell+\frac{7}{\ell}\right)$.
Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(u_n-\sqrt{7}\right)^2}{u_n}$$

4. On définit la suite (d_n) par :
$$d_0=1 \quad ; \quad d_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot{d_n}^2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$u_n-\sqrt{7}\leqslant d_n$$

b. Voici un algorithme :

Variables :	n et p son des entiers naturels
	d est un réel
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p
Initialisantions :	Affecter à d la valeur 1
	Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que : $\quad d>10^{-p}$
	Affecter à d la valeur $0{,}5\cdot d^2$
	Affecter à n la valeur $n+1$
Sortie :	Afficher n

En entrant 9, l'algorithme affiche le nombre 5.
Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?

Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

Exercice 6763

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation :
$$u_{n+1}=a\cdot u_n+b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a\neq 1)$$

On pose, pour tout entier naturel n : $\quad v_n=u_n-\frac{b}{1-a}$

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant $80\,cm$.
On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de $30\,cm$ au cours des douze mois suivants.
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?

2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015+n)$.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n :
$$h_{n+1}=0{,}75\cdot h_n+30$$

b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variation de la suite (h_n). Démontrer cette conjecture *(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence)*.

c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

3. Suites et logarithmes :

Exercice 5966

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :
$$u_0=2 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{1+3u_n}{3+u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $\quad u_n>1$

2. a. Etablir que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$$

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
En déduire que le suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :
$$u_0=2 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{1+0{,}5u_n}{0{,}5+u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	Pour i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\frac{1+0{,}5u}{0{,}5+u}$ Afficher u Fin Pour

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n=3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n=12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,0083	0,9973	1,0009	0,9997	1,0001	0,99997	1,00001	0,999996	1,000001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n par :
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 6264

On administre à un patient un médicatment par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de $10\,m\ell$ de médicament. On estime que $20\,\%$ du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi, $u_0 = 10$.

a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à $1\,\%$ de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de $10\,m\ell$ de médicament. On estime que $20\,\%$ du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en dessous de $5\,m\ell$, la machine réinjecte $4\,m\ell$ de produit.

Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang à la minute n.

L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

Variables :	n est un entier naturel
	v est un nombre réel.
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.
Traitement :	Pour n allant de 1 à 15
	Affecter à v la valeur $0{,}8 \times v$.
	Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v+4$
	Afficher v
	Fin de boucle

a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n	10	8	6,4					8,15

n	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte $2\,m\ell$ de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à $6\,m\ell$ et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.
Recopier l'algorithme précédente en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3. On programme la machine de façon que :
- à l'instant 0, elle injecte $10\,m\ell$ de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte $1\,m\ell$ de médicament.

On estime que $20\,\%$ du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en $m\ell$, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

a. Justifier que pour tout entier naturel n :
$w_{n+1} = 0{,}8 \cdot w_n + 1$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = w_n - 5$.
Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

Exercice 3267

1. Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

a. Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.

b. Comparer les quatres premiers termes de la suite u aux quatres premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$w_n = \frac{n}{n+1}.$$

c. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite de terme général v_n défini par :
$$v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
où ln désigne la fonction logarithme népérien :

a. Montrer que : $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$

b. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$
Exprimer S_n en fonction de n.
Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Suites et intégrations :

Exercice 3161

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} \quad \text{pour } n \geqslant 2 \end{cases} \quad ; \quad v_n = u_n - \ln n \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

1. a. Calculer u_2, u_3 et u_4.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :
   $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul :
   $$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$$

   b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :
   $$u_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant u_n - \frac{1}{n} \quad ; \quad 0 \leqslant v_n \leqslant 1$$

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

   b. En déduire le sens de variations de la suite (v_n).

4. Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) *(on ne cherchera pas à calculer γ)*. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 3144

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
   $$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1$$

   a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.

   b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\,;e]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

   a. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\,;1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\,;0)$.

   b. Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

   c. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.

   d. Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n)).

3. a. Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et α_n.

   b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que :
   $$f_{n+1}(\alpha_n) < 0$$

   c. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

   d. Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Etablir que $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ.

4. On désigne par $\mathscr{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = e$.

   a. Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à $\dfrac{\alpha_n^2}{n}$.

   b. Etablir que : $\quad (e - \alpha_n)\ln\alpha_n \leqslant \dfrac{\alpha_n^2}{n} \leqslant (e - \alpha_n)$

   c. En déduire un encadrement de $n(e - \alpha_n)$.

   d. la suite de terme général $n(e - \alpha_n)$ est-elle convergente ? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n) ?

5. Suites et complexes :

Exercice 3170

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. On prendra pour unité graphique $5\,cm$.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
   Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $\quad u_n = |z_n|$.
   Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

3. A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4. a. Etablir que, pour tout entier naturel n :
   $$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i.$$
   En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.

   b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $\quad \ell_n = A_0A1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.
   Exprimer ℓ_n, en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

7. Suites et passages à la limite ⚠ :

Exercice 3148

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

1. a. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Etudier le sens de variation de f, et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$. *(On prendra comme unité 2 cm).*

b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $\left(O\,;\,\vec{i}\right)$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$: $\quad f(x) \leqslant x$.

c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d. Prouver qu'elle converge.

3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation :

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

En déduire sa valeur.

Exercice 3902

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier n par :

$$u_{n+1} = \frac{4 \cdot u_n - 1}{u_n + 2}$$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$ alors on a, pour tout nombre entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne en annexe une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. a. Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$u_n - 1 > 0$$

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.

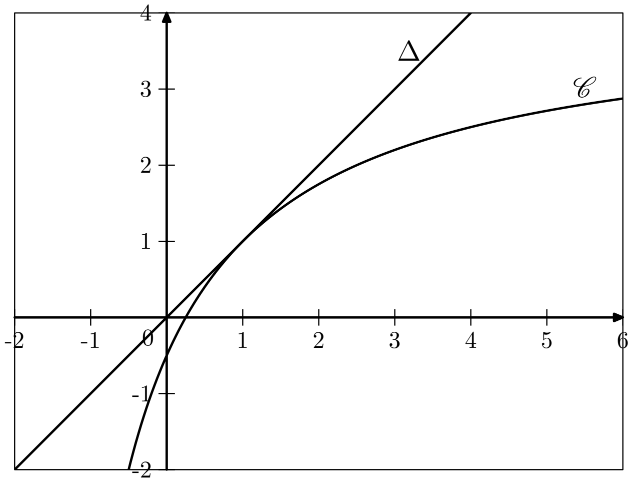
3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).



Exercice 5017

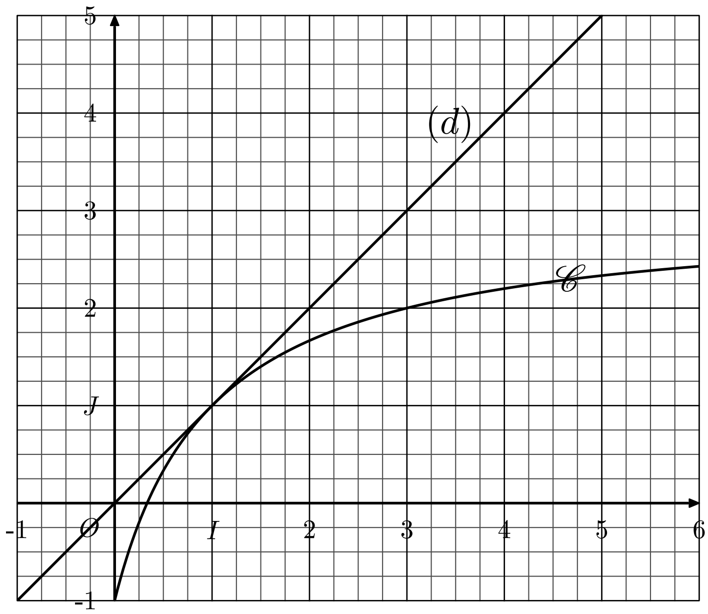
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$$

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. On a tracé, ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et la droite (d) d'équation $y = x$.



a. Sur le graphique, placer sur l'axe des abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3. Faire apparaître les traits de construction.

b. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

2. Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 1. b. :

a. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que la fonction f est croissance sur $\left[0\,;+\infty\right[$. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \leqslant u_n$.

c. Déduire des questions précédentes que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente et calculer sa limite.

