Terminale S/Algorithme

1. Autour de la limite d'une suite :

Exercice 5363

On considère l'algorithme suivant où les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N :

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.

Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à $N-1$
  Affecter à U la valeur $3{\cdot}U-2k+3$
Fin pour

Sortie
Afficher U

1. Quel est l'affichage en sortie lorsque $N=3$?
2. On considère la suite (u_n) définie par :
   $u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = 3{\cdot}u_n - 2{\cdot}n + 3 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   On admet que la suite (u_n) est croissante et admet pour limite :
   $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = +\infty$

   Proposé un algorithme qui, pour une valeur donnée p en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que :
   Pour tout $n \geqslant n_0$, on ait : $\quad u_n \geqslant 10^p$

Exercice 5836

On définit la suite (d_n) par :

$$d_0 = 1 \quad ; \quad d_{n+1} = \frac{1}{2}{\cdot}{d_n}^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Voici un algorithme :

Variables : n et p sont des entiers naturels
  d est un réel.
Entrée : Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations : Affecter à d la valeur 1.
  Affecter à n la valeur 0.
Traitement : Tant que : $\quad d > 10^{-p}$.
    Affecter à d la valeur $\quad 0{,}5{\cdot}d^2$
    Affecter à n la valeur $\quad n+1$
  Fin Tant que
Sortie : Afficher n

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.

Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?

Exercice 5838

On considère la suite (p_n) définie par :
$p_1 = 0 \quad ; \quad p_{n+1} = 0{,}2{\cdot}p_n + 0{,}04$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

On admet que la suite (p_n) est croissante et converge vers 0,05.

On considère l'algorithme suivant :

Variables : K et J sont des entiers naturels
  P est un nombre réel.
Initialisation : P prend la valeur 0
  J prend la valeur 1
Entrée : Saisir la valeur de K
Traitement : Tant que $\quad P < 0{,}05 - 10^{-K}$
    P prend la valeur $\quad 0{,}2 \times P + 0{,}04$
    J prend la valeur $\quad J+1$
  Fin tant que
Sortie : Afficher J

1. A quoi correspond l'affichage final J ?
2. Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

Exercice 5362

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Ecrire un algorithme déterminant le plus petit entier n_0 supérieur ou égal à 2 tel que $|u_{n_0}| \leqslant 10^{-2}$

2. Valeur des termes d'une suite :

 BY-NC

Exercice 5377

On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a. Saisir un réel strictement positif non nul b $(b>a)$ Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANT QUE : $n<N$ Affecter à n la valeur $n+1$ Affecter à u la valeur $\frac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v.
Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a=4$, $b=9$ et $N=2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Exercice 5839

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{2 \cdot u_n}$$

On considère l'algorithme suivant :

Variables : n est un entier naturel.
i est un entier naturel.
u est un réel positif
Initialisation : Demander la valeur de n
Affecter à u la valeur 1
Traitement : Pour i variant de 1 à n :
Affecter à u la valeur $\sqrt{2 \cdot u}$
Fin de Pour
Sortie : Afficher u

1. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n=3$.

2. Que permet de calculer cet algorithme ?

3. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n :

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

Quelle conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

Exercice 5841

On définit les suites (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad v_0 = 1 \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2 \cdot v_n}{3} \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables : u, v et w des nombres réels
N et k des nombres entiers
Initialisation : u prend la valeur 0
v prend la valeur 1
Début de l'algorithme :
Entrer la valeur de N
Pour k variant de 1 à N
w prend la valeur u
u prend la valeur $\frac{w+v}{2}$
v prend la valeur $\frac{w+2 \cdot v}{3}$
Fin du Pour
Afficher u
Afficher v
Fin de l'algorithme

a. On exécute cet algorithme en saisissant $N=2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

k	w	u	v
1			
2			

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Exercice 5842

On considère l'algorithme suivant :

Variables : A et B des nombres réels
K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
Affecter à A la valeur $\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{3}$
Affecter à B la valeur $\frac{B}{3}$
Fin Pour
Afficher A

On exécute cet algorithme en saisissant $N=2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme *(on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près)*

K	A	B
1		
2		

Exercice 6000

On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ x_n = \frac{5}{4}\cdot x + \frac{3}{4}\cdot y \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y_0 = 5 \\ y_n = \frac{3}{4}\cdot x + \frac{5}{4}\cdot y \end{cases}$$

On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.

Une erreur a été commise. Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées :

Entrée : Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation : Affecter à x la valeur -1
Affecter à y la valeur 5
Traitement : POUR i allant de 1 à N
Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}y$
Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y$
Affecter à x la valeur a
Affecter à y la valeur b
FIN POUR
Sortie : Afficher x, Afficher y

Exercice 5804

On considèr e la suite numérique (v_n) définie par :

$$v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n}$$

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme 1
Variables :
v est un réel.
i et n sont des entiers naturels
Début algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à n faire
v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme

Algorithme 2
Variables :
v est un réel.
i et n sont des entiers naturels
Début algorithme :
Lire n
Pour i allant de 1 à n faire
v prend la valeur 1
v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme

Algorithme 3
Variables :
v est un réel.
i et n sont des entiers naturels
Début algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à n faire
Afficher v
v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme

2. Pour $n=10$, on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

   Pour $n=100$, on obtient l'affichage suivant :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. Somme des termes d'une suite :

Exercice 5378

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables : i et n sont des entiers naturels.
u est un réel
Entrée : Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation : Affecter à u la valeur de 0
Traitement : Pour i variant de 1 à n.
Affecter à u la valeur de $u+\frac{1}{i}$
Fin Pour
Sortie : Afficher u

   Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n=3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

   A l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

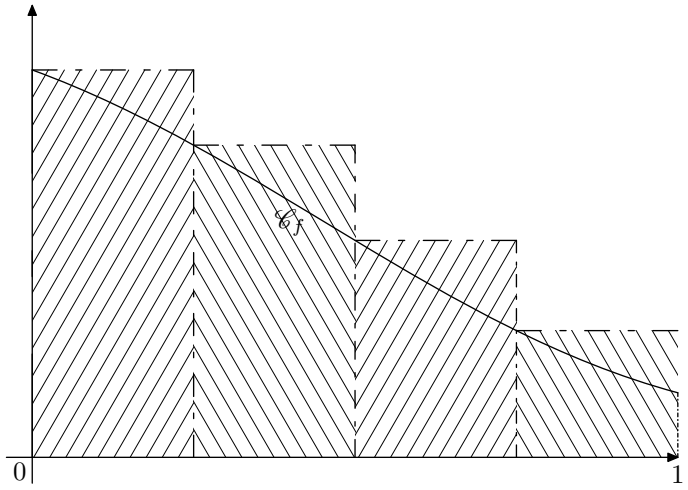
Exercice 5999

On considère une fonction f décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On note $\mathcal{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

1. On représente ci-dessous une approximation de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ à l'aide des quatres rectangles ci-dessous :

 BY-NC



Compléter l'algorithme ci-dessous afin d'obtenir l'aire formé par les quatre rectangels :

Variables :	k est un nombre entier
:	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à ...
:	Affecter à S la valeur ...
:	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpte l'intervalle $[0\,;\,1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun des intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question précédente.

   Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

4. Vers les probabilités :

Exercice 5364

On considère l'algorithme :

```
A et C sont des entiers naturels,
C prend la valeur 0
Répéter 9 fois
  A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7
    Si A>5 alors C prend la valeur de C+1
    Fin Si Fin répéter
Afficher C
```

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle $\mathcal{X}$ la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.

Quelle loi suit la variable $\mathcal{X}$? Préciser ses paramètres.

5. Prévoir le fonctionnement d'un algorithme :

Exercice 5361

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté. A la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. A l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?

2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   - "rand(1,50)" permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle $[1\,;50]$;
   - l'écriture "x:=y" désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables :	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation :	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement :	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$
	Début du tant que
	$a := rand(1{,}50)$; $b := rand(1{,}50)$;
	$c := rand(1{,}50)$; $d := rand(1{,}50)$;
	$e := rand(1{,}50)$
	Fin du tant que
Sortie :	Afficher a, b, c, d, e.

   a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :

   $L_1 = \{2\,;\,11\,;\,44\,;\,2\,;\,15\}$; $L_2 = \{8\,;\,17\,;\,41\,;\,34\,;\,6\}$

   $L_3 = \{12\,;\,17\,;\,23\,;\,17\,;\,50\}$; $L_4 = \{45\,;\,19\,;\,43\,;\,21\,;\,18\}$

   b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

Exercice 5843

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2 \cdot \frac{\ln x}{x}$$

On donne l'algorithme suivant :

Variables : a, b et m sont des nombres réels
Initialisation : Affecter à a la valeur 0
Affecter à b la valeur 1
Traitement : Tant que $b-a>0{,}1$
Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$
Si $f(m)<1$
Alors Affecter à a la valeur m
Sinon Affecter à b la valeur m
Fin de Si
Fin de Tant que
Sortie : Afficher a
Afficher b

Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

Exercice 5939

Voici un algorithme applicable à des nombres de trois chiffres dont le chiffre des centaines n'est pas égal à celui des unités :

Etape 1 : Inverser l'ordre des chiffres *(par exemple 275 devient 572)*

Etape 2 : Calculer la différence du plus grand et du plus petit de ces deux nombres.

Etape 3 : Ré-itérer l'étape 1 sur le nombre obtenu.

Etape 4 : Additionner ces deux derniers nombres

1. a. Appliquer l'algorithme aux nombres 123, 448 et 946.

   b. Que peut-on conjecturer ?

2. Pour implémenter cet algorithme, l'étape 2, implicite lorsqu'on effectue les calculs *"à la main"*, nécessite de dissocier l'entier saisi d'en isoler le chiffre des unités, celui des dizaines puis celui des centaines.

   Compléter l'algorithme suivant dont le rôle est d'effectuer cette dissociation. Dans cet algorithme a est le chiffre des centaines, b celui des dizaines et c celui des unités du nombre n que l'on souhaite décomposer.

Entrée :
n est un entier naturel.

Initialisation :
Donner à a la valeur 0
Donner à b la valeur 0
Donner à c la valeur 0

Traitement :
Tant que $n\geqslant 100$
Affecter à a la valeur $a+1$
Affecter à n la valeur $n-100$
Fin Tant que
Tant que n .....
Affecter à b la valeur .....
Affecter à ..... la valeur .....
Fin Tant que
Affecter à c la valeur .....

Sortie :
Afficher a
Afficher b
Afficher c

 BY-NC