ompilerles exercic | mpilerles correcti | Plusd options

Terminales S - Spécialité/Similitudes

1. Transformation et complexe :

Exercice 3933

On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

On considère le point M du plan d'affixe z. Pour chaque question, on associe au point M un point M' dont l'affixe z' est définie en fonction de z.

Déterminer la nature et les caractéristiques de chacune de ces applications :

a. $z' = z - 1 + 2{\cdot}i$

b. $z' = 2{\cdot}z + 3 - 2{\cdot}i$

c. $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}{\cdot}i\right){\cdot}z + 1 + i$

Exercice 3941

Dans le complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on considère la similitude directe f d'écriture complexe :

$$z \longmapsto \frac{3}{2}{\cdot}(1-i){\cdot}z + 4 - 2{\cdot}i$$

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner un démonstration de la réponse choisie :

$f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3{\cdot}\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2-2{\cdot}i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 4028

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. On désigne par m un nombre réel. On considère la transfromation T_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = (m+i){\cdot}z + m - 1 - i$$

1. Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation ?

2. Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

2. Similitude directe :

Exercice 3970

Le plan complexe est muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ orthonormal direct d'unité graphique $1\,cm$, on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives :

$$a = 1+i \quad ; \quad b = -1+2{\cdot}i \quad ; \quad c = 2+3{\cdot}i$$

$$m = 7-5{\cdot}i \quad ; \quad n = 5-i \quad ; \quad p = 9+i$$

1. a. Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.

   b. Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP.

   c. En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence la similitude directe qui transforme le triangle ABC en le triangle MNP.

2. Soit s la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P.

   a. Montrer qu'une écriture complexe de la similitude s est :
   $$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}{\cdot}i\right){\cdot}z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}{\cdot}i$$

   b. Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude s.

   c. Vérifier que la similitude s transforme le point C en M.

Exercice 3972

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ d'unité $1\,cm$.

1. Soient les points C et D d'affixes respectives $c{=}3$ et $d{=}1{-}3{\cdot}i$, et $\mathcal{S}_1$ la similitude qui à tout point M du plan associe le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe $\left(O\,;\,\vec{u}\right)$ des réels.

   a. Placer les points C et D puis leurs images respectives C_1 et D_1 par $\mathcal{S}_1$. On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

   b. Donner l'expression complexe de $\mathcal{S}_1$.

2. Soit $\mathcal{S}_2$ la similitude directe définie par :
   - le point C_1 et son image C' d'affixe : $c'{=}1{+}4{\cdot}i$;
   - le point D_1 et son image D' d'affixe : $d'{=}{-}2{+}2{\cdot}i$.

   a. Montrer que l'expression complexe de $\mathcal{S}_2$ est :
   $$z' = i{\cdot}z + 1 + i$$

   b. En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.

3. Soit $\mathcal{S}$ la similitude définie par : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$.
Déterminer l'expression complexe de $\mathcal{S}$.

☐ **Exercice 4116**

Le plan complexe est muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormal.

Soit A et C les points d'affixes respectives :
$a = 3+5{\cdot}i \quad ; \quad c = 1+4{\cdot}i$

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :
$z' = (2-2{\cdot}i){\cdot}z + 1$

1. Soit M le point d'affixe $z = x+i{\cdot}y$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs. Soit M' l'image de M par f.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $x+3{\cdot}y=2$

2. On considère l'équation (E): $x+3{\cdot}y=2$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Vérifier que le couple $(-4\,;2)$ est une solution de (E).
   b. Résoudre l'équation (E).
   c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $\left[-5\,;5\right]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.
   Placer ces points sur la figure.

3. Similitude indirecte :

☐ **Exercice 4003**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives :
$z_A = 2+i \quad ; \quad z_B = 5+2{\cdot}i \quad ; \quad z_C = i$

s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

1. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' telle que :
$$z' = \Big(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}{\cdot}i\Big){\cdot}\overline{z} + \Big(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}{\cdot}i\Big)$$

2. En déduire l'affixe de C', symétrique de C par rapport à (AB).

3. Démontrer que l'ensemble des points M' tels que z' est imaginaire pur est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $4x+3y=1$

4. Vérifier que le point C' appartient à $(\mathcal{D})$.

☐ **Exercice 3969**

Soit $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ un repère orthonormal direct du plan complexe *(unité graphique : 4 cm)*

On désigne par A le point d'affixe : $z_A = 1$.

On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point d'affixe $-\overline{z}+2$.

1. Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1+i{\cdot}\sqrt{3}$.

2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.

3. Déterminer l'image par la transformation T du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

☐ **Exercice 4029**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$, on considère les deux rectangles $OABC$ et $DEFG$ où les points A, B, C, D, E, F, G ont pour affixes respectives.

$z_A = -2 \quad ; \quad z_B = -2+i \quad ; \quad z_C = i \quad ; \quad z_D = 1$

$z_E = 1+3{\cdot}i \quad ; \quad z_F = \dfrac{5}{2}+3{\cdot}i \quad ; \quad z_G = \dfrac{5}{2}$

On considère la similitude indirecte s' d'écriture complexe :
$z' = -\dfrac{2}{3}{\cdot}i{\cdot}\overline{z} + \dfrac{5}{3}{\cdot}i$

1. Déterminer l'image du rectangle $DEFG$ par la similitude s'.

2. On considère la similitude $g = s' \circ s$. Déterminer l'image du rectangle $OABC$ par la similitude g.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non-frutueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   La similitude g a-t-elle des points fixes ? Que peut-on en conclure pour g ?

☐ **Exercice 4113**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

1. On considère la similitude s admettant l'écriture complexe :
$z' = \Big(-\dfrac{6}{5}-\dfrac{8}{5}{\cdot}i\Big){\cdot}z + \dfrac{23}{5}+\dfrac{9}{5}{\cdot}i$
Déterminer l'ensemble des points invariants de la similitude s.

2. On considère la similitude σ admettant l'écriture complexe :
$z' = i{\cdot}\overline{z}+1+i$
Déterminer l'ensemble des points invariants de la similitude σ.

255. Exercices non-classés :

Exercice 4315

On considère l'équation : $(E) : 3{\cdot}x-2{\cdot}y=1$

1. a. Montrer que le couple $(-1\,;-2)$ est une solution de (E).

   b. Déterminer tous les couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E).

2. Soient d et d' les droites d'équations respectives :
   $y=2{\cdot}x+4 \quad ; \quad 3{\cdot}x-2{\cdot}y=1$

   a. Vérifier que pour tout entier relatif k, le point A_k de coordonnées $(k-3\,;2{\cdot}k-2)$ appartient à la droite d.

   On admettra que ce sont les seuls points de d à coordonnées entières.

   b. Montrer que les seuls points de d' à coordonnées entières sont les points $B_{k'}$ de coordonnées :
   $(2{\cdot}k'-1\,;3{\cdot}k'-2)$ où $k'\in\mathbb{Z}$.

3. a. Existe-t-il deux entiers relatifs k et k' tels que :
   $A_k=B_{k'}$?

   b. Déterminer les entiers relatifs k et k' tels que le segment $\left[A_kB_{k'}\right]$ soit parallèle à l'axe des abscisses.

   c. Trouver l'entier q tel que : $\overrightarrow{A_{3q}B_{2q}}=4{\cdot}\overrightarrow{u}$

4. Soit Ω un point quelconque du plan dont l'affixe est notée ω. On note H le milieu du segment $\left[A_6B_4\right]$.

   On désigne par f la similitude directe de centre Ω, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   a. Donner l'écriture complexe de la similitude f.

   b. Déterminer l'affixe du point Ω pour que l'image du point H soit l'origine O du repère.

Exercice 4653

Soit un triangle équilatéral direct ABC et soit D un point du segment $[BC]$. La parallèle à la droite (AC) menée par D coupe la droite (AB) en E et la parallèle à la droite (AB) menée par D coupe la droite (AC) en F.
Soit le point G, centre de gravité du triangle ABC et les points H et A', symétriques de G et A par rapport à la droite (BC).
On définit les points I et J centres de gravité respectifs des triangles BDE et CDF.

On dédinit les similitudes directes S_1, de centre C, de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et S_2, de centre B, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et leur composée : $f=S_2\circ S_1$

1. Déterminer les images de J et H par f.

2. Déterminer la nature et des éléments caractéristiques de f.

3. En déduire la nature du triangle HIJ.

