Seconde/Un peu plus

1. Raisonnement :

Exercice 304

Dans chaque ligne, reconstruisez si possible la phrase à l'aide de :
(Si ... alors ...) ou (... si, et seulement si, ...)

A_1.	Il pleut	A_2.	Je prends mon parapluie
B_1.	I milieu de $[AB]$	B_2.	$AI = BI$
C_1.	$a \geqslant b$	C_2.	$a - b \geqslant 0$
D_1.	$a < 3$	D_2.	$a < 5$
E_1.	$a \geqslant b$	E_2.	$a^2 \geqslant b^2$
F_1.	$a = 2$	F_2.	$a^2 = 4$ et $a > 0$
G_1.	$AB = AC$	G_2.	ABC est isocèle
H_1.	$\sqrt{a}$ existe	H_2.	$a \in \mathbb{R}_+$

Exercice 1868

Pour chacun des couples de propositions suivantes, dîtes si :

- A est nécessaire pour B
- A est suffisant pour B
- A est équivalent à B

	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$
1	Le triangle ABC est rectangle	$AB^2 = AC^2 + BC^2$
2	$2x + 5 = 3$	$x = -1$
3	$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$	I milieu de $[AB]$
4	$x \geqslant 0$	$x \geqslant 3$
5	$a = 5$	$a^2 = 25$

3. Cercle trigonométrique :

Exercice 4650

Dans le plan, on considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et $[AB]$ un diamètre de ce cercle.
Le point C est un point du cercle $\mathscr{C}$ distincts de A et de B.

A tout point M du cercle $\mathscr{C}$, distinct de A et de B, on associe la construction suivante :

- la droite (d) parallèle à la droite (AC) passant par le point M ; elle intercepte une seconde fois le cercle $\mathscr{C}$ en D.
- la droite (d') parallèle à la droite (BC) passant par le point M ; elle intercepte une seconde fois le cercle $\mathscr{C}$ en E.
- on note G le centre de gravité du triangle MDE.

Préciser le lieu géométrique du point G lorsque le point M se déplace sur le cercle $\mathscr{C}$.

4. Suites et nombres de Fibonacci :

Exercice 590

L'hypothèse du continue suppose que toute partie de droite peut être découpée indéfiniment et que chaque partie à une longueur non-nulle.
Cette hypothèse va à l'encontre de la conception de la matière en tant que masse d'atome, mais est très utilisé dans les phénomènes de mouvement, dans la théorie quantique.

Le calcul infinitésimal est la branche des mathématiques qui étudient l'infiniment loin et l'infininiment proche.

(paradoxe de Zénon d'Elée)

> "Il n'y a point de mouvement, car il faut que le mobile arrive au milieu de son parcours avant d'atteindre la fin"

Ce paradoxe est censé mettre en echec la continuité : c'est à dire que l'on peut diviser indéfiniment une longueur. Concept a l'opposé du discret *(théorie atomiste)*

Exercice 1872

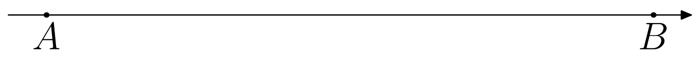
Considérons un point X se déplaçant de A vers B en décrivant l'intégralité du segment.

On décompose le parcours du point de la manière suivante :

- On dira que ce point arrivera à la première étape, lorsqu'il aura parcouru la moitié de $[AB]$: on notera X_1 ce point.
- Il sera à la seconde étape lorsqu'il aura parcouru la moitié du chemim restant, c'est à dire la moitié de $[X_1B]$: ce point sera noté X_2.
- La troisième étape sera la moitié de $[X_2B]$: la moitié de la distance restante....
- Et ainsi de suite.

On considère X_0 comme étant le point A de départ.

1. Placer sur la droite ci-dessous les points X_1, X_2, X_3 et X_4.



2. On supposera désormais que la distance AB mesure 1 mètre.
   a. Donner la distance X_0X_1, X_1X_2, X_2X_3 et X_3X_4.
   b. Par extrapolation, donner les mesures de X_4X_5, X_5X_6, X_6X_7 et X_7X_8.
   c. Pour $n \in \mathbb{N}$, faîtes une conjecture quant à la distance $X_{n-1}X_n$.

3. On se propose d'étudier la somme infini de termes :
   $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$
   Pour cela, pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la somme à n termes :
   $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$
   a. Ecrire, sans calculer, les sommes S_3, S_4 et S_5.
   b. Etablir la formule : $S_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot S_n$
   c. Donner une raison pour laquelle les nombres S_n se rapprochent de la valeur 1 lorque le nombre d'étape devient très grande.
   On dira que S_n admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
   d. En notant S la valeur limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$: on notera $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_n = S$. Par passage à la limite de la formule 2., on obtient l'égalité :
   $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot S.$
   Retrouver la valeur de S.

On vient de mettre en évidence une des propriétés de l'hypothèse du continu :

Tout segment peut être découpé en une infinité de segments tous de longueurs non-nulle.

Exercice 1873

Définition du petit Robert de la dichotomie : Division, subdivision binaire *(entre deux éléments qu'on sépare nettement et qu'on oppose)*

En admettant la thèse de la continuité, tout objet est divisable à l'infini. On sait que $\sqrt{2} \in [1\,;2]$ car :

$1^2 < \left(\sqrt{2}\right)^2 < 2^2$

Deux nombres et leurs carrés étant rangés dans le même ordre.

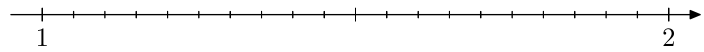
$1 < \sqrt{2} < 2$

Mise en place de l'algorithme :

- A l'étape 0 *(l'étape initiale)*, on sait que $\sqrt{2}$ est contenu dans l'intervalle $[1\,;2]$
- Pour passer à l'étape suivante, on considère le milieu de cet intervalle 1,5. Puis on compare 1,5 et $\sqrt{2}$ afin de savoir si $\sqrt{2}$ est contenu dans l'intervalle $[1\,;1{,}5]$ ou l'intervalle $[1{,}5\,;2]$.
- On obtient ainsi un nouvelle intervalle correspondant à l'étape 1

On réitère ce procédé une infinité de fois. On notera $[a_n\,;b_n]$ l'intervalle correspondant à l'étape n et u_n sa longueur.

1. a. Donner la valeur de u_0, u_1 et u_2.
   b. Placer les points a_0, b_0, a_1, b_2, a_3 et b_4 sur la droite graduée ci-dessous.



2. a. Donner la valeur de u_n en fonction de n.
   b. Donner un encadrement de $b_n - a_n$ pour $n = 10$.
   En déduire la précision de l'approximation de $\sqrt{2}$ par u_{10}

3. Que devient la valeur de u_n lorsque n croit vers $+\infty$ *(on dit que n tends vers l'infini)*. C'est à dire quel est la valeur de $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$.

Exercice 1874

Achille et la tortue *(paradoxe de Zénon d'Elée)*

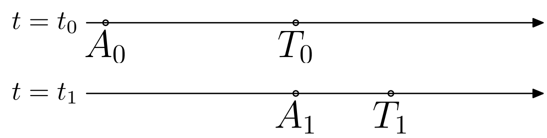
Si la tortue a de l'avance sur Achille, celui-ci ne pourra jamais la rattraper, quel que soit sa vitesse ; car qu'Achille court pour atteindre le point d'où est partie la tortue, celle-ci avance de telle sorte qu'Achille ne pourra jamais annuler cette avance

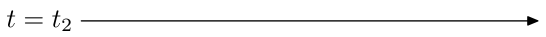
On suppose que la tortue a pris un mètre d'avance, qu'Achille court à la vitesse de $2\,{}^{m}/_{s}$ et la tortue à une vitesse de $1\,{}^{m}/_{s}$.

On note t_0 l'instant de départ, A_0 la position initiale d'Achille et T_0 celle de la tortue.
t_1 est l'instant où Achille atteint la position précédente de la Tortue. Notons A_1 cette position, la tortue continuant à avancer se trouve en T_1.
Et ainsi de suite.

En se basant sur le fait qu'on puisse découper en autant de bout le parcours d'Achille et de la tortue *(hypothèse de la continuité)*, on croit qu'Achille ne rattrapera jamais la tortue puisque il lui restera toujours une part du chemin à parcourir. Autre embêtement, tous ses petits segments mis bout à bout on quelle mesure ? Autrement dit, Achille rattrapera la tortue à l'infini ?

1. Placer sur la dernière droite graduée le point A_2 et T_2.





2. Donner les valeurs de $T_0 - A_0$, $T_1 - A_1$, $T_2 - A_2$.

3. On accepte le fait que, à tout rand détude, on a :
$u_n = T_n - A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Nous allons calculer à quel distance du point d'Achille, les participants vont se rejoindre. On note :
$u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

a. Développer : $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times S_n$

b. En déduire : $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$

c. Donner la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini qu'on note :
$$\lim_{n \mapsto +\infty} u_0 + u_1 + \cdots + u_n \quad \text{ou} \quad \lim_{n \mapsto +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_n$$

Remarque :

- Les paradoxes de Zénon ont été rapporté par Aristote dans son livre sur la physique *(Livre VI)*
- On aurait aussi pût considérer les deux fonctions qui au temps associe la position d'Achille et de la tortue sur la droite et déterminer le point d'intersection.

Exercice 1875

La discontinuité *(paradoxe de Zénon d'Elée)*

5. *Résolution de problèmes :*

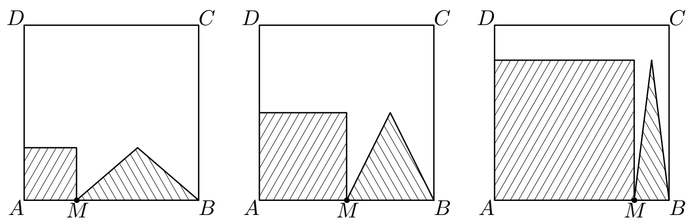
Exercice 6030

On considère un carré $ABCD$ et un point M appartenant au segment $[AB]$. On consture à l'intérieur du carré :

- un carré ayant le segment $[AM]$ pour côté ;
- un triangle isocèle admettant le segment $[MB]$ pour base principale.

On considère le domaine $\mathcal{D}$ du plan formé de ces deux figures.

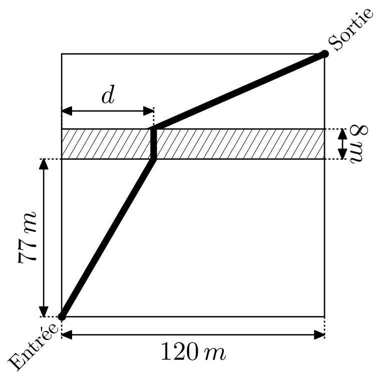
Voici trois représentations de cette situation :



Déterminer la position du point M pour l'aire du domaine $\mathcal{D}$ soit la moitié de celle du carré $ABCD$.

Exercice 6031

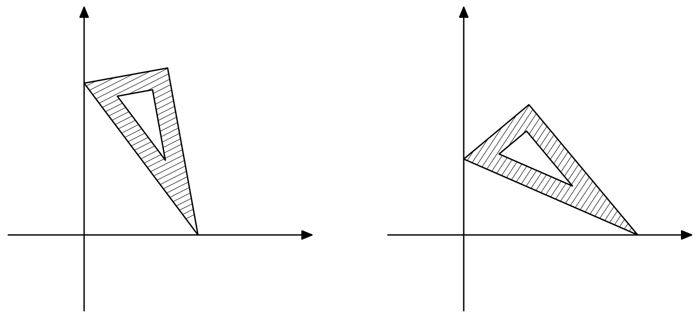
La ville "*Promenade*" souhaite emmenager un terrain de forme carré traversé par une rivière traversant latéralement le terrain.
La figure ci-dessous représente le terrain et la rivière est la partie hachurée :



A quelle distance d doit-on placer le pont pour que la distance parcourue par un visiteur soit minimale ?

Exercice 6032

On considère une équerre dont les deux sommets de son hypoténuse sont situés respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.



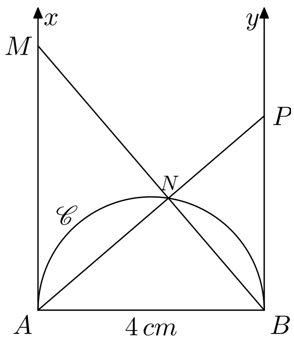
Lorsque l'équerre glisse dans ces conditions, quel est le lieu géométrique du sommet de l'angle droit ?

Exercice 6033

Dans la figure ci-contre, est représenté le demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$, les axes (Ax) et (By) sont perpendiculaires à la droite (AB).

M est un point quelconque de la demi-droite $[Ax)$.

N est le point d'intersection, autre que B, du demi-cercle $\mathscr{C}$ et de la droite (MB).

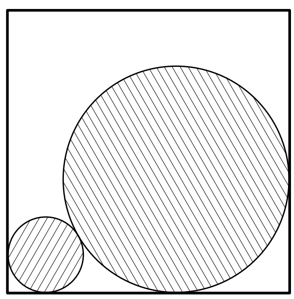


P est le point d'intersection de la droite (AN) et de l'axe (By).

Que peut-on dire de la fonction f définie par :
$f : AM \longrightarrow BP$

Exercice 6034

Deux boules se trouvent au fond du boite cubique d'arête $15\,cm$. La grande boule a un rayon 3 fois supérieur à la petite boule.
La coupe transversale donnée ci-contre montre qu'elle sont "*parfaitement emboitées*" au fond de cette boîte.
Déterminer le rayon de chacune de ces boules.



255. Exercices non-classés :

Exercice 182

1. On considère le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Montrer que, pour tout entier n naturel supérieur à 2, les nombres F_n vérifient la relation suivante :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Les nombres (F_n) s'appellent les "*nombres de Fibonacci*"; toute suite de nombres présentant une telle relation sera dîte de "*Suites de Fibonacci*".

Plus précisément, la suite étudiée précédemment est défini par les conditions initiales :
$F_0=0 \quad ; \quad F_1=1$

Il est clair que : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} F_n=+\infty$.

Nous allons étudier maintenant le rapport de deux termes consécutifs ; c'est à dire que nous allons étudier la valeur du quotient $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ quand n devient de plus en plus grand *(c'est à dire lorsque n tend vers $+\infty$).*

2. a. Pour $n=2$, établir l'égalité suivante :
$$\frac{F_{n+1}}{F_n}=2$$

   b. Remplissez le tableau suivant avec une précision à 10^{-5} près :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{F_{n+1}}{F_n}$										

3. Faire une conjecture quant à la limite de la suite (F_n) et le nombre d'or $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nous allons maintenant montrer que toutes suites de Fibonacci à le rapport de ses termes consécutifs qui tend vers le nombre d'or :

4. En notant R_n la valeur du rapport $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$, montrer que :
$$R_n = 1 + \frac{1}{R_{n-1}}$$

5. En admettant, que la suite (R_n) admet une limite finie r lorsque n tend vers $+\infty$, en déduire que r vérifie la relation :
$$r^2 = r+1$$

6. Vérifier que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont deux nombres vérifiant cette équation.

7. En admettant le fait qu'un polynome du second degré ne peut s'annuler qu'en au plus deux valeurs, dîtes pourquoi la suite des rapports $\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)$ tend nécessairement vers $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 180

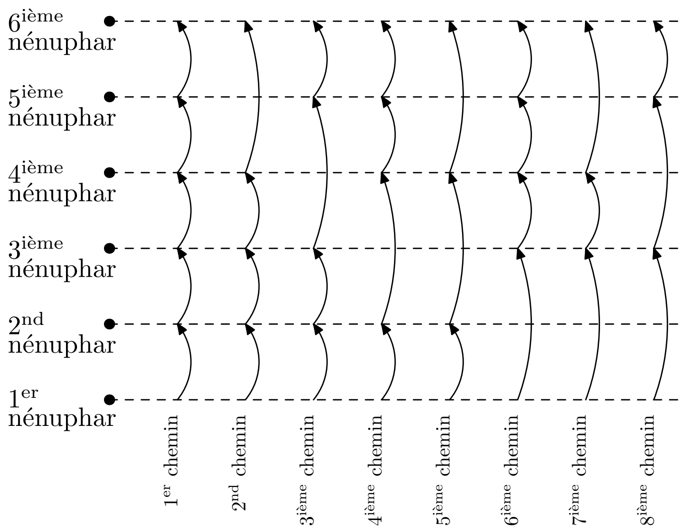
Fibonacci est un mathématicien italien du 13ième siècle. Il est notamment connu pour avoir défini une suite de nombres *(appelée suite de Fibonacci)* ayant un implication forte dans certains phénomènes de modélisation : modèle mathématique, étude de la prolifération de bactérie.

Nous allons étudier le déplacement d'une grenouille pour mettre en place cette suite de nombres.

On considère une rivière où une grenouille veut se déplacer de nénuphars en nénuphars ; elle peut :

- soit passer d'un nénuphar à un suivant ;
- soit sauter par dessus un nénuphar pour atteindre directement le suivant.

Lorsque 6 nénuphars sont alignés, voici les huits trajets possibles que la grenouille peut emprunter pour passer du premier nénuphar au dernier.



1. a. Donner le nombre de chemins différents que peut prendre la grenouille lorsque son chemin est constitué de :
   2 nénuphars ; 3 nénuphars
   4 nénuphars ; 5 nénuphars
   Dans chaque cas, faire un dessin représentant tous les chemins possibles.

   b. Dans le cas où le chemin est constitué de 6 nénuphars, le schéma préédent indique que 8 trajets distincts sont possibles. Comment peut-on retrouver le nombre 8 avec les résultats de la question a. .
   Justifier votre raisonnement.

   c. En déduire le nombre de trajets possibles lorsque le chemin est composé de 10 nénuphars.

2. On note F_n le nombre de trajets possibles lorsque le chemin est composé de n nénuphars. Donner une relation entre F_n, F_{n-1} et F_{n-2}.

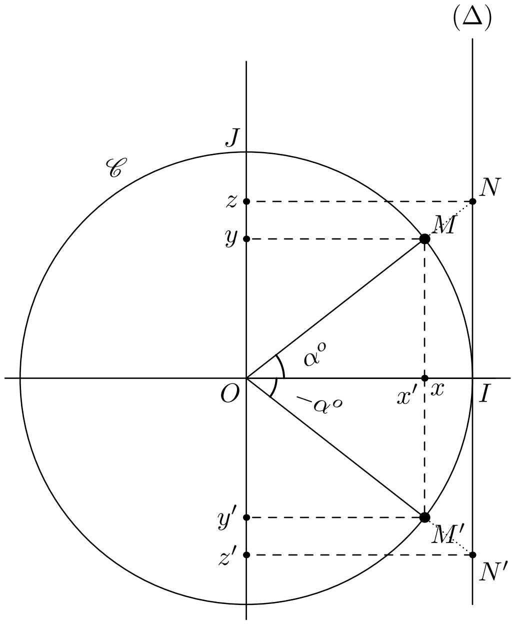
Cette suite de nombre s'appelle la suite des nombres de Fibonacci.

Exercice 591

Sur le cercle trigonométrique, on repère le point M et M' relativement à partir des $\widehat{IOM}$ et $\widehat{IOM'}$ qu'ils forment à partir de l'axe des abscisses.

1. Comparer : $\cos\alpha$ et $\cos(-\alpha)$.

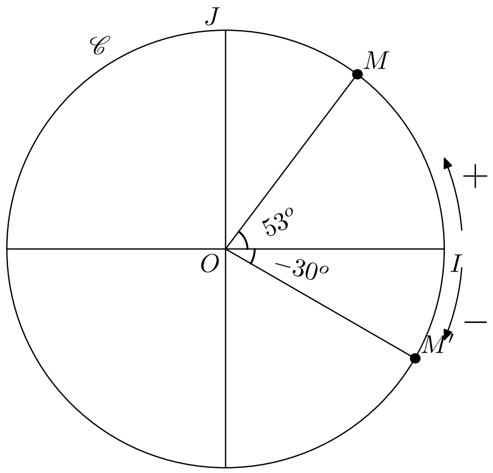
2. Comparer : $\sin\alpha$ et $\sin(-\alpha)$.



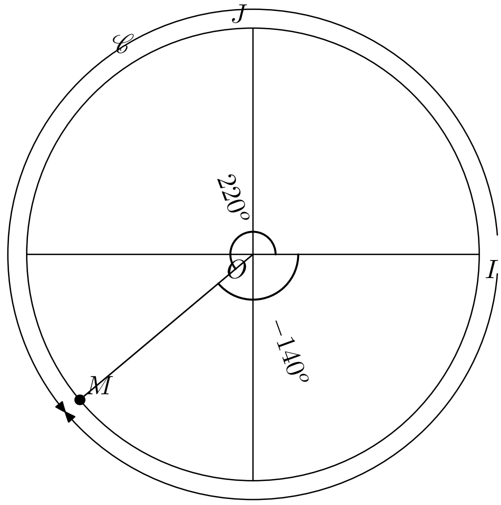
Exercice 595

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$.
On appelle cercle trigonométrique, le cercle de centre O l'origine du repère et de rayon 1.
Pour caractériser tout point M du cercle, on mesure l'angle $\widehat{MOI}$. C'est le début des repères polaires où chaque point sera caratérisé de manière unique relativement à leur distance à l'origine du repère et l'angle cité précédemment.

Un angle aura une valeur positive si on parcourt l'arc $\widehat{IM}$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Et l'angle sera négatif, si on parcourt ce même arc dans le sens des aiguilles d'une montre.



Tout point du cercle peut être repéré par un angle. Mais, on peut facilement associer deux angles à un seul point :



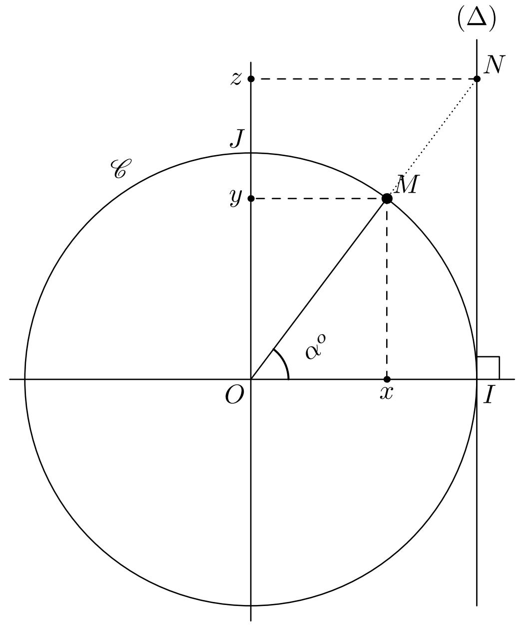
De même, on pourra parler également d'angle faisant plus d'un tour. Mais, la géomŕie plane nétudiant pas des figures dynamiques mais plutôt des configurations fixes du plan, parlez d'un angle de 390^o et de 30^o revient au même

1. Que pouvez-vous dire des points caractérisés par les angles :
   30^o ; -330^o ; 390^o
2. Donner 5 angles caractérisitiques

Exercice 596

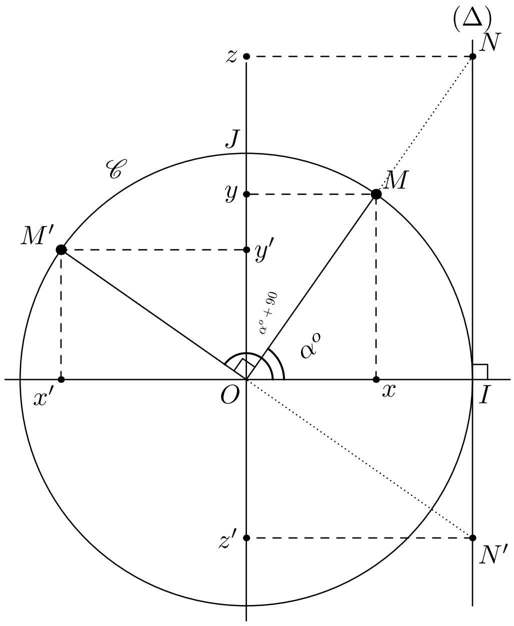
On considère le plan muni du repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 : ce cercle s'appelle le *cercle trigonométrique*. On considère la droite (Δ) passant par le point I et perpendiculaire à l'axe des abscisses.
On considère le point M du plan appartenant au cercle $\mathscr{C}$, l'angle $\widehat{MOI}$ mesure α degré.

1. Donner une relation faisant intervenir la longueur x et la mesure de l'angle α.
2. Faîtes de même avec la longueur y et l'angle α.
3. a. En étudiant le rapport $\dfrac{NI}{OI}$, donner une relation dans le cercle trigonométrique entre la longueur z et l'angle α.
   b. Comment s'appelle la droite (Δ) relativement au cercle $\mathscr{C}$



Exercice 597

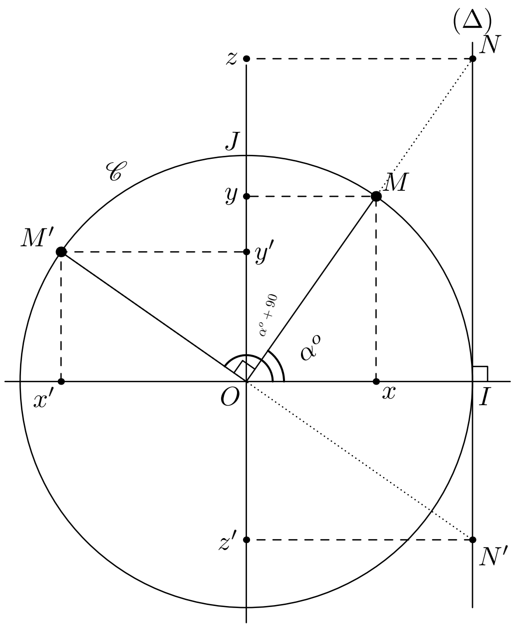
Sur le cercle trigonométrique, le point M est repéré à partir de l'angle α et le point M' est repéré à l'aide de l'angle $\alpha{+}90$.



1. Donner en fonction de α, la mesure de l'angle $\widehat{x'M'O}$.
2. Trouver des relations entre les valeurs de $\cos\alpha$, $\cos(\alpha{+}90)$, $\sin\alpha$ et $\sin(\alpha{+}90)$.

Exercice 599

Sur le cercle trigonométrique, le point M est repéré à partir de l'angle α et le point M' est repéré à l'aide de l'angle $\alpha{+}90$.



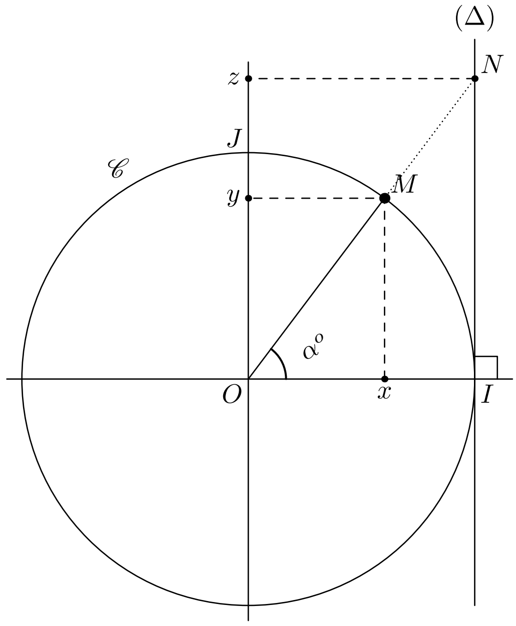
1. Donner en fonction de α, la mesure de l'angle $\widehat{x'M'O}$.
2. Trouver des relations entre les valeurs de :
   $\cos\alpha \quad ; \quad \cos(\alpha{+}90) \quad ; \quad \sin\alpha \quad ; \quad \sin(\alpha{+}90)$

Exercice 601

On considère le plan muni du repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 : ce cercle s'appelle le *cercle trigonométrique*. On considère la droite (Δ) passant par le point I et perpendiculaire à l'axe des abscisses.
On considère le point M du plan appartenant au cercle $\mathscr{C}$, l'angle $\widehat{MOI}$ mesure α degré.

1. Donner une relation faisant intervenir la longueur x et la mesure de l'angle α.
2. Faîtes de même avec la longueur y et α.
3. a. En étudiant le rapport $\dfrac{NI}{OI}$, donner une relation dans le cercle trigonométrique entre la longueur z et l'angle α.

   b. Comment s'appelle la droite (Δ) relativement au cercle $\mathscr{C}$



Exercice 2728

Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes :

a. Si $x<2$ alors $x<3$

b. Si $x<3$ alors $x<2$

c. Si $x\leqslant 3$ alors $x<3$

d. Si $x<3$ alors $x\leqslant 3$

e. Si $x=2$ alors $2x+3=7$

f. Si $2x+3=7$ alors $x=2$

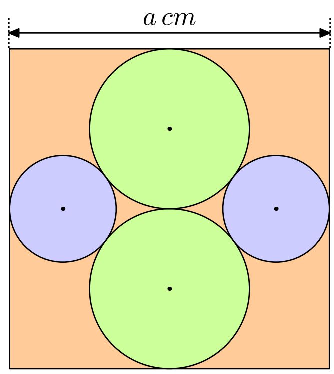
g. Si $2x-5$ alors $x<3$

h. Si $x<3$ alors $2x-5<2$

Exercice 6397

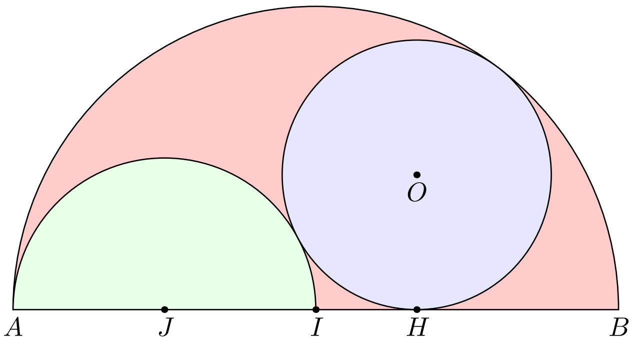
Cette figure est composée d'un carré dans lequel est inscrit quatre cercles tangents entre eux et tangents aux côtés du carré.

Exprimer en fonction de a le rayon de chacun de ces cercles.



Exercice 6398

Voici la représentation d'un sangaku :



Il est composé de deux demi-disques et d'un disque tous tangents entre eux.

Détermine les mesures IH et OH en fonction de la longueur JI.

